CORSO DI ALLINEAMENTO

MATERIALE DIDATTICO

Prof. Christian Facchini

christian.facchini1975@gmail.com

Indice

1. Elementi di logica

2. Algebra di primo grado

Le equazioni di primo grado

Le disequazioni di primo grado

3. Algebra di secondo grado

4. Equazioni e disequazioni con quadrati, valori assoluti e irrazionali

5. La funzione esponenziale e la funzione logaritmo

6. Goniometria

1. Elementi di logica

Aristotele fu il primo pensatore a trattare la logica come una disciplina a se stante; raccolse i suoi studi in un'opera chiamata *Organon*. "Organon" significa *strumento*: la logica offre infatti le *regole del buon pensare* e consente di ottenere deduzioni – inferenze – corrette a partire da premesse vere.

In queste righe tratteremo le linee essenziali della logica, quanto basta per scrivere in un linguaggio matematico corretto e conoscere il significato di alcuni "simboli stenografici".

1.1 La proposizione

Chiamiamo *proposizione* un'affermazione per cui si può stabilire se è vera o falsa.

Le proposizioni si indicano con le lettere in stampatello o stampatello minuscolo, oppure vengono indicate tra virgolette " " o tra parentesi tonde ( ).

- "fare matematica è divertente" *non è una proposizione:* per alcuni può esserlo, per altri no
- (la matematica è una materia della prima liceo) è una proposizione, *ed è vera*
- "i giorni della settimana sono otto" è una proposizione, *ed è falsa*

1.2 Operazioni tra proposizioni

La negazione

Data una proposizione P, si chiama negazione di P e si indica con $\bar{P}$ la proposizione vera se P è falsa e falsa se P è vera.

Esempio.

Se $P\ =\ \text{“}x < 5\text{”}$ allora $\bar{P} = \text{"}x \geq 5\text{"}$

Il connettivo aut

Date due proposizioni p e q, si ottiene la proposizione

$$p \vee q \qquad \text{(si legge “}p\text{ o }q\text{”)}$$

che è considerata vera se o *p,* o *q,* o entrambe sono vere.

Il simbolo ∨ si chiama *aut.*

Il connettivo et

Date due proposizioni p e q, si ottiene la proposizione

$$p \wedge q \qquad \text{(si legge “}p\text{ e }q\text{”)}$$

che è considerata vera se *sia p che q sono vere.*

Il simbolo ∧ si chiama *et.*

1.3 L'implicazione logica

Date due proposizioni p e q, si ottiene la proposizione

$$p \Longrightarrow q$$

che si può leggere

- p implica q
- se p allora q
- da p segue q

La proposizione p è detta *antecedente* e la proposizione q è detta *conseguente.*

La proposizione è *considerata falsa solo nel caso in cui p sia vera e q sia falsa.*

Esempio.

- $(x < 5) \Longrightarrow (x < 8)$ è *vera* (una proposizione che dipende da una variabile si chiama *predicato* ed è considerata vera se è vera per ogni assegnazione della variabile)
- $(x < 5) \Longrightarrow (x > 8)$ *è falsa*
- $5 < 2 \Longrightarrow 8 < 9$ *è vera*
- $5 < 2 \Longrightarrow 8 < 7$ *è vera*

Data la proposizione

$$p \Longrightarrow q$$

- p è detta *condizione sufficiente per q* (sufficiente = che implica)
- q è detta *condizione necessaria per q* (necessaria = che è implicata)

Esempio.

Dati $P = "x < 5"$ e $Q = "x < 8"$

- P è una condizione sufficiente per Q (è *sufficiente* che si verifichi P affinché si verifichi Q)
- Q è una condizione necessaria per P (è *necessario* che si verifichi Q affinché si verifichi P)

1.4 L'equivalenza logica

Bertrand Russell, celebre matematico e filosofo inglese vissuto a cavallo tra l'800 e il '900, sosteneva che *tutta la matematica* non era altro che l'insieme delle proposizioni della forma $p \Longrightarrow q$.

Ogni teorema in matematica può essere espresso nella forma $p \Longrightarrow q$, dove p è detta *ipotesi* e q è detta *tesi.*

E' legittimo chiedersi, dato un teorema $p \Longrightarrow q$, se è vero anche *il teorema inverso* $q \Longrightarrow p$.

La risposta è che *può essere vero,* ma non è detto che lo sia.

Esempio 1.
Consideriamo l'esempio visto prima

$$(x < 5) \Longrightarrow (x < 8)$$

In questo caso *non è vero l'inverso*

$$(x < 8) \Longrightarrow (x < 5)$$

Infatti se $x = 6$ la proposizione diventa

$$(6 < 8) \Longrightarrow (6 < 8)$$

ovvero

$$V \Longrightarrow F$$

che abbiamo visto essere falsa.

In questo caso diremo che $(x < 8)$ è una proposizione *necessaria ma non sufficiente* per $(x < 5)$.

Esempio 2.
Sia $x \in \mathbb{N}$. Consideriamo le proposizioni $P = (3 < x < 5)$ e $Q = (x = 4)$.

In questo caso

$$P \Longrightarrow Q$$

ovvero Q è una condizione *necessaria per P*, ma anche

$$Q \Longrightarrow P$$

ovvero Q è una condizione *sufficiente per P.*

Se, date le proposizioni P e Q è vero che $P \Longrightarrow Q$ e $Q \Longrightarrow P$ diremo che Q *è una condizione necessaria e sufficiente per P, e che P è una condizione necessaria e sufficiente per Q* e scriveremo

$$P \Longleftrightarrow Q$$

che leggeremo

- P se e solo se Q
- P equivale a Q
- P è logicamente equivalente a Q
- Q è una condizione necessaria e sufficiente per P
- P è una condizione necessaria e sufficiente per Q

Esercizio 1.
Date le seguenti coppie di proposizioni, stabilisci quali sono necessarie, sufficienti, sia necessarie che sufficienti o né necessarie e né sufficienti.

a) $P = (x$ è un numero dispari$)$, $Q = (x$ è un numero primo$)$

b) $P = (x$ ha valore assoluto positivo$)$, $Q = (x = 5)$

c) $P = (x$ ha quadrato nullo$)$, $Q = (x = 0)$

d) $P = (x$ è un quadrilatero$)$, $Q = (x$ è un trapezio$)$

e) $P = (x$ è un triangolo isoscele$)$, $Q = (x$ è untriangolo equilatero$)$

f) $P = (x$ è un triangolo isoscele$)$, $Q = (x$ ha due angoli congruenti$)$

Esercizio 2.
Trova una coppia di proposizioni tali che: siano logicamente equivalenti, una sia necessaria ma non sufficiente per l'altra, non siano né necessarie né sufficienti.

Esercizio 3.
Esprimi i teoremi seguenti nella forma $P \Longrightarrow Q$ o $P \Longleftrightarrow Q$.

a) Un rombo ha le diagonali perpendicolari.

b) Un numero primo maggiore di due è dispari.

c) L'essere umano è bipede.

d) Condizione necessaria e sufficiente per la promozione è riportare la sufficienza in ogni materia.

e) La somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto.

f) L'asse di un segmento è l'insieme di tutti e soli i punti equidistanti dagli estremi del segmento.

I quantificatori

Quando scriviamo le proposizioni, utilizzeremo a volte i seguenti simboli

- $\forall$ lo leggeremo "per ogni" oppure "ogni"
- $\exists$ lo leggeremo "esistono" oppure "esiste"
- $\exists!$ lo leggeremo "esiste un unico", "esiste ed è unico"

Al posto di scrivere "tale che" si usano i due punti ":" o, in alternativa "|".

2. Algebra di primo grado

2.1 Generalità sulle equazioni

Definizione.
Chiamiamo *equazione* una uguaglianza fra due espressioni algebriche.

Se le espressioni algebriche contengono ad esempio le lettere x, y, z diremo che abbiamo un'equazone in x, y, z.

Esempio.
- $x - 5 = 0$ è un'equazione in x
- $z = z$ è un'equazione in z
- $x = y^2$ è un'equazione in x, y
- $t^2 - t$ *non è un'equazione*

Le lettere che compaiono nelle equazioni si chiamano *incognite.*

L'espressione a sinistra dell'uguale si chiama *primo membro,* l'espressione a destra *secondo membro;* il primo e il secondo membro vengono anche chiamati *termini dell'equazione.*

Definizione.
Chiamiamo *grado di un'equazione* il grado massimo dei monomi che compaiono nell'equazione.

Ricordiamo che
- il grado di un monomio è *la somma* degli esponenti delle parti letterali
- i termini noti si assume abbiano grado zero

Esempio.
1. L'equazione $xy = 1$ ha grado 2, perché xy ha grado 2 e 1 ha grado zero
2. L'equazione $x^3 = x + 1$ ha grado 3, perché x^3 ha grado 3, x ha grado 1 e 1 ha grado 1
3. L'equazione $x - 3 = 5$ ha grado 1, perché x ha grado 1 e i termini noti hanno grado zero

In questo capitolo considereremo solo equazioni con una sola incognita.

Definizione.
Chiamiamo *soluzione* di un'equazione un *numero* che soddisfa due condizioni

1. può essere sostituito al posto della incognita
2. rende vera l'uguaglianza

Dire che un numero può essere sostituito al posto della incognita significa che, se sostituiamo il numero al posto della incognita otteniamo un'espressione che ha significato (a prescindere dal suo valore di verità).

Dire che un numero rende vera l'uguaglianza significa che se sostituiamo il numero al posto della incognita otteniamo un'uguaglianza numerica *vera.*

L'insieme delle soluzioni di un'equazione la chiameremo semplicemente *soluzione dell'equazione* e la indicheremo con S.

Esempio 1.
Consideriamo l'equazione

$$\frac{10}{x - 3} = 5$$

Verifichiamo se il numero 3 è una soluzione: sostituendo 3 al posto di x otteniamo l'uguaglianza numerica

$$\frac{10}{0} = 5$$

che è priva di senso, perché una frazione con denominatore zero è una espressione non definita.

Pertanto il numero 3 *non è soluzione,* perché non soddisfa la prima condizione.

Verifichiamo se il numero 4 è soluzione: sostituendolo al posto di x otteniamo $\frac{10}{4-3} = 5$, ovvero

$$10 = 5$$

che è un'uguaglianza falsa.

Quindi 4 non è una soluzione, ma *per un motivo diverso dal numero 3*: infatti 4 soddisfa la prima condizione (la sostituzione è legittima, otteniamo un'uguaglianza *che ha significato*) ma non soddisfa la seconda condizione (l'uguaglianza è *falsa*).

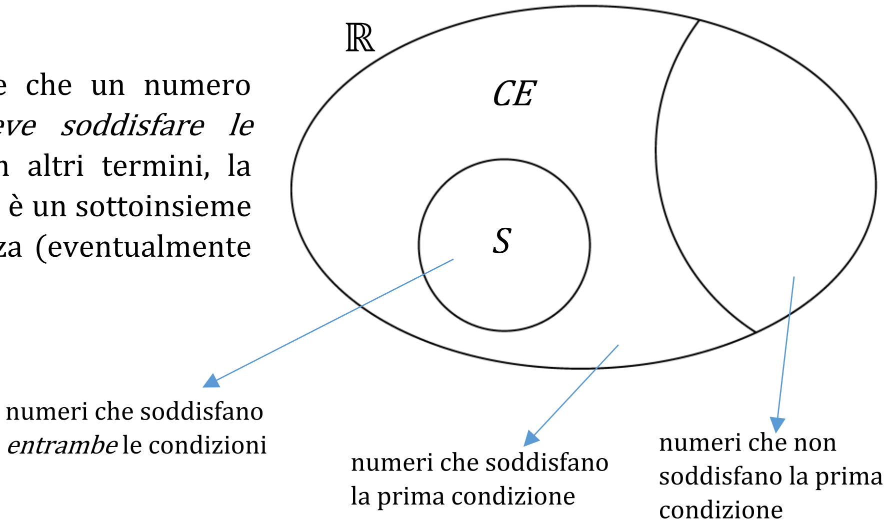
Vediamo infine se il numero 5 è soluzione: sostituendo otteniamo $\frac{10}{5-3} = 5$, ovvero

$$\frac{10}{2} = 5$$

che è un'uguaglianza che *ha significato, ed è vera:* dunque 5 soddisfa entrambe le condizioni ed è pertanto una soluzione dell'equazione, dunque $5 \in S$.

Definizione.
Data una equazione chiamiamo *condizioni di esistenza* (CE) dell'equazione l'insieme dei numeri che soddisfano la prima condizione, ovvero i numeri per cui è lecita la sostituzione (a prescindere che l'uguaglianza numerica ottenuta sia vera o falsa).

Osserviamo esplicitamente che un numero per essere soluzione *deve soddisfare le condizioni di esistenza:* in altri termini, la soluzione di una equazione è un sottoinsieme delle condizioni di esistenza (eventualmente possono coincidere).



Esempio 1.
Consideriamo l'equazione

$$\frac{x-3}{x-3} = 1$$

Un numero per essere sostituibile deve dare un senso all'uguaglianza: la frazione è una espressione definita se il denominatore è diverso da zero, pertanto

$$CE: x \neq 3$$

Quindi le soluzioni sono da ricercarsi fra tutti i numeri che non siano 3.

In questo caso *ogni numero* sostituibile è anche soluzione, perché il numeratore e il denominatore della frazione sono uguali.

Dunque la soluzione coincide con le condizioni di esistenza e $S = \mathbb{R} - \{3\}$.

Esempio 2.
Consideriamo l'equazione

$$x^2 = -1$$

In questo caso *ogni* numero è sostituibile, dunque $CE: \forall x \in \mathbb{R}$ (si può anche scrivere $CE = \mathbb{R}$).

Osserviamo che un quadrato non è mai negativo: quindi tutti i numeri sono sostituibili, ma nessun numero rende vera l'uguaglianza, dunque l'equazione non ha soluzione.

L'insieme delle soluzioni non ha elementi, pertanto $S = \emptyset$ (si può anche scrivere $S: \nexists x \in \mathbb{R}$).

Esempio 3.
Consideriamo l'equazione

$$x + 1 = 1 + x$$

Anche in questo caso ogni numero è sostituibile al posto della incognita, pertanto $CE = \mathbb{R}$.

Osserviamo inoltre che *ogni numero* soddisfa l'uguaglianza, dunque $S = \mathbb{R}$.

Definizione.
Diciamo che una equazione è *una identità* se il primo e il secondo membro hanno le stesse condizioni di esistenza e se ogni numero che soddisfa le condizioni di esistenza è anche soluzione dell'equazione.

Esempio 1.
L'equazione dell'esempio precedente $x + 1 = 1 + x$ è una identità.

Esempio 2.
L'equazione

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

è una identità: infatti i due membri hanno le stesse condizioni di esistenza $CE = \mathbb{R}$; inoltre l'uguaglianza è sempre vera perché è lo sviluppo del quadrato di un binomio.

Esempio 3.
L'equazione

$$\frac{x}{x} = 1$$

non è una identità, infatti

- il primo membro ha per $CE: x \neq 0$
- il secondo membro è definito per ogni valore di x, dunque $CE: \forall x \in \mathbb{R}$

Osserviamo che se un numero appartiene a entrambe le condizioni di esistenza (ovvero se non è nullo) certamente rende vera l'uguaglianza.

Esempio 4.
L'equazione

$$\frac{x-1}{x(x-1)} = \frac{1}{x}$$

non è una identità, infatti

- il primo membro ha per $CE: x \neq 0 \wedge x \neq 1$
- il secondo membro ha per $CE: x \neq 0$

Anche in questo caso ogni numero che verifica entrambe le CE (ovvero diverso da 0 e da 1) rende vera l'uguaglianza.

Definizione.
Diciamo che due equazioni sono *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni (ovvero se hanno lo stesso insieme delle soluzioni).

Esempio 1.
Consideriamo le equazioni

$$E_1: x + 3 = 5$$

$$E_2: 3x = 6$$

Sono evidentemente due equazioni distinte, perché i primi e i secondi membri sono diversi tra loro.

È facile vedere però che in entrambi i casi l'unico numero che le verifica è 2, ovvero la loro soluzione è $S = \{2\}$: pertanto sono equazioni equivalenti.

Esempio 2.
Consideriamo

$$E_1: x = 3$$

$$E_2: x^2 = 9$$

L'unico numero che rende vera la prima equazione è 3, pertanto $S_1 = \{3\}$.

Il numero 3 è anche soluzione della seconda equazione, ma non è l'unica: infatti se sostituiamo al posto dell'incognita -3 otteniamo l'uguaglianza $(-3)^2 = 9$, evidentemente vera.

Nessun altro numero rende vera l'uguaglianza, dunque la soluzione della seconda equazione è $S_2 = \{-3, +3\}$: le due equazioni non sono quindi equivalenti.

Osservazione.
Nell'insieme delle equazioni è possibile introdurre la relazione

$$E_1 \mathcal{R}\, E_2 \Leftrightarrow E_1 \text{ e } E_2 \text{ sono equivalenti}$$

In altri termini, due equazioni stanno in relazione fra loro se hanno le stesse soluzioni.

Si tratta, evidentemente, di una relazione *riflessiva, simmetrica e transitiva* ovvero di una relazione di *equivalenza.*

Sappiamo che una relazione di equivalenza in un insieme induce una *partizione* dell'insieme: è possibile quindi suddividere tutte le equazioni in gruppi contenenti le equazioni che hanno la stessa soluzione, in modo che una equazione appartenga sempre a un gruppo e a uno soltanto.

Definizione.
Diciamo che un'equazione è *intera* se l'incognita non compare al denominatore di una frazione. Se l'incognita compare al denominatore di una frazione diremo che l'equazione è *fratta.*

Esempio.
- $3x - 1 = 4x + 4$ è una equazione intera
- $\frac{2}{3}x = 5 - \frac{x}{2}$ è una equazione intera
- $x = \frac{x-2}{x-3}$ è una equazione fratta
- $\frac{1}{x-y} = 1$ è una equazione fratta

2.2 Equazioni di primo grado intere

D'ora in avanti ci occuperemo di equazioni di primo grado intere in una incognita, che usualmente indicheremo con la lettera x, ad esempio
- $x - 1 = 3$
- $\frac{2}{3}x = 4 - 3x$

Le equazioni di primo grado vengono anche dette *equazioni lineari.*

Abbiamo visto che una equazione è descritta da un'espressione del tipo

$$I\ membro = II\ membro$$

Intuitivamente la possiamo pensare come fosse una bilancia a due bracci, come quella del fruttivendolo: se i due piatti contengono oggetti con lo stesso peso allora sono in equilibrio e si trovano alla stessa altezza.

E' evidente che se operiamo in un qualche modo sul contenuto di uno dei due piatti, per preservare l'equilibrio è necessario operare allo stesso modo nell'altro piatto.

Queste considerazioni intuitive giustificano il seguente

Principio di equivalenza.
Data una equazione E, si ottiene una equazione equivalente se

1. si somma (o si sottrae) al primo e al secondo membro lo stesso numero
2. si moltiplica (o si divide) il primo e il secondo membro per uno stesso numero *non nullo*

Diremo che la somma e la sottrazione dei due membri di una equazione per un numero e la moltiplicazione e la divisione dei due membri per un numero non nullo sono *operazioni elementari* su una equazione.

Esempio.
Consideriamo l'equazione

$$(\blacksquare)\quad x-1=4$$

che ha evidentemente per soluzione $S=\{5\}$.
Vediamo ora, con qualche esempio, che se operiamo allo stesso modo sui membri dell'equazione otteniamo sempre equazioni equivalenti, ovvero distinte ma con la stessa soluzione.

- Se sommiamo il numero 5 ai due membri otteniamo

$$[+5]\qquad x-1+5=4+5$$

ovvero

$$x+4=9$$

che ha ancora per soluzione $S=\{5\}$.

- Se sottraiamo 2 ai due membri

$$[-2]\qquad x-1-2=4-2$$

ovvero

$$x-3=2$$

e ancora $S=\{5\}$.

- Moltiplicando per 3

$$[\cdot 3]\qquad 3(x-1)=4\cdot 3$$

ovvero

$$3x-3=12$$

la cui soluzione è $S=\{5\}$.

- Dividendo per 2 (o, il che è lo stesso, moltiplicando per $\frac{1}{2}$)

$$[:2]\qquad \frac{x-1}{2}=\frac{2}{2}$$

ovvero

$$\frac{x-1}{2}=1$$

che conserva la soluzione $S=\{5\}$.

Osservazione importante.
Il principio di equivalenza sostiene che è lecito sommare o sottrarre i membri dell'equazione per un *qualunque numero,* mentre esclude la moltiplicazione e la divisione per zero.

È naturale escludere la divisione per zero, perché sappiamo che non è un'operazione consentita.

Il motivo per cui si esclude la moltiplicazione per zero è che moltiplicando i termini di una equazione per zero non otteniamo, in generale, un'equazione equivalente.

A titolo d'esempio consideriamo $x - 1 = 4$, che ha per soluzione $S = \{5\}$.

Se moltiplichiamo i due membri per zero otteniamo l'equazione

$$0 \cdot (x - 1) = 0 \cdot 5$$

che non è un'equazione equivalente, visto che è verificata per qualunque assegnazione dell'incognita e ha pertanto soluzione $S = \mathbb{R}$.

Vediamo ora un'applicazione importante del principio di equivalenza.

Consideriamo ad esempio

$$x - 5 = 3$$

Se sommiamo 5 ai due membri otteniamo

$$x - 5 + 5 = 3 + 5$$

ovvero

$$x = 3 + 5$$

da cui, infine $x = 8$.

Osserviamo che partendo da

$$(1)\ x - 5 = 3$$

e sommando 5 siamo passati all'equazione equivalente

$$(2)\ x = 3 + 5$$

In altri termini, *è come se* il termine -5 si fosse spostato dal primo membro al secondo membro, cambiando di segno.

In realtà abbiamo visto che le cose non stanno proprio così: il termine al primo membro -5 è stato eliminato perché abbiamo sommato 5, ma per sommare al primo membro 5 abbiamo *dovuto* (a causa del principio di equivalenza) sommare 5 anche al secondo membro.

Pertanto il $+5$ al secondo membro rimasto non proviene da quello al primo membro col segno cambiato, ma è il $+5$ che abbiamo *dovuto* sommare al secondo membro, perché abbiamo *voluto* sommare 5 al primo membro.

Tuttavia, parlare di termini che "si trasportano" da un membro all'altro è un *modo di dire* comodo, che utilizzeremo anche noi da qui in avanti.

Generalizzando questo procedimento per un monomio qualunque al primo o al secondo membro di una equazione, possiamo dire che *è possibile trasportare un monomio che compare in una equazione da un membro a un altro, cambiandolo di segno.*

Vediamo ora una classe di equazioni speciali: sono quelle esprimibili come

$$x = N, N \in \mathbb{R}$$

Sono equazioni di questo tipo, ad esempio

- $x = 3$
- $x = 0$
- $x = -5$

e così via.

Sono speciali perché è immediato riconoscerne la soluzione: se consideriamo l'equazione

$$x = 3$$

è evidente che la soluzione è $S = \{3\}$.

Questo vale per ogni equazione di questo tipo: da $x = N$ segue $S = \{N\}$.

Abbiamo posto le basi per ottenere una strategia risolutiva per le equazioni di primo grado intere.

L'idea è che a partire da un'equazione di cui si vuole trovare la soluzione, effettuando operazioni elementari *che non cambiano la soluzione* ottenere (se è possibile) un'equazione del tipo $x = N$, la cui risoluzione è immediata.

La soluzione dell'equazione $x = N$ coinciderà con la soluzione dell'equazione di partenza.

$$E \xrightarrow{op.el} E_1 \xrightarrow{op.el} E_2 \xrightarrow{op.el} E_3 \xrightarrow{op.el} \dots \xrightarrow{op.el} \boxed{x = N}$$

Esempio.
Risolviamo l'equazione

$$3x - 1 = x + 7$$

Per mezzo di operazioni elementari vogliamo portarci a un'equazione equivalente del tipo

$$x = N$$

"Trasportiamo" quindi il -1 al secondo membro e x al primo membro, ottenendo

$$3x - x = 7 + 1$$

ovvero

$$2x = 8$$

L'equazione non è ancora del tipo cercato: per isolare la x dobbiamo dividere per 2 il primo membro (e quindi, per ottenere un'equazione equivalente, dividere per 2 anche il secondo membro).
Otteniamo così

$$x = 4$$

In definitiva: siamo partiti dall'equazione da risolvere $3x - 1 = x + 7$ e per mezzo di operazioni elementari che non modificano la soluzione abbiamo ottenuto l'equazione $x = 4$, che ha per soluzione il numero 4.

Pertanto la soluzione cercata è $S = \{4\}$.

Data un'equazione, non è sempre possile ottenere un'equazione equivalente nella forma $x = N$.

Vediamo infatti i seguenti esempi.

Esempio 1.
Consideriamo l'equazione

$$2x + 3 = 7 + 2x$$

Trasportiamo i termini in x al primo membro e i termini noti al secondo membro

$$2x - 2x = 7 - 3$$

ovvero

$$0 \cdot x = 4$$

Non è possibile isolare l'incognita x, perché la divisione per zero non è una operazione ammessa.

Da un esame diretto dell'equazione vediamo che nessun numero sostituito al posto dell'incognita rende vera l'uguaglianza, dunque $S = \emptyset$.

Esempio 2.
Consideriamo l'equazione

$$5x + 3 = 3 + 5x$$

Trasportiamo i termini in x al primo membro e i termini noti al secondo membro

$$5x - 5x = 3 - 3$$

ovvero

$$0 \cdot x = 0$$

Anche in questo caso non è possibile isolare l'incognita x, perché la divisione per zero non è una operazione ammessa, ma è facile vedere che ogni numero sostituito al posto dell'incognita rende vera l'uguaglianza, pertanto $S = \mathbb{R}$.

Definizione.
Diciamo che un'equazione di primo grado è in forma canonica (o normale) se è del tipo

$$ax = b \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Sono equazioni in forma canonica, ad esempio

- $3x = 6$
- $5x = 0$
- $0x = 7$
- $0x = 0$

Vale il seguente, fondamentale

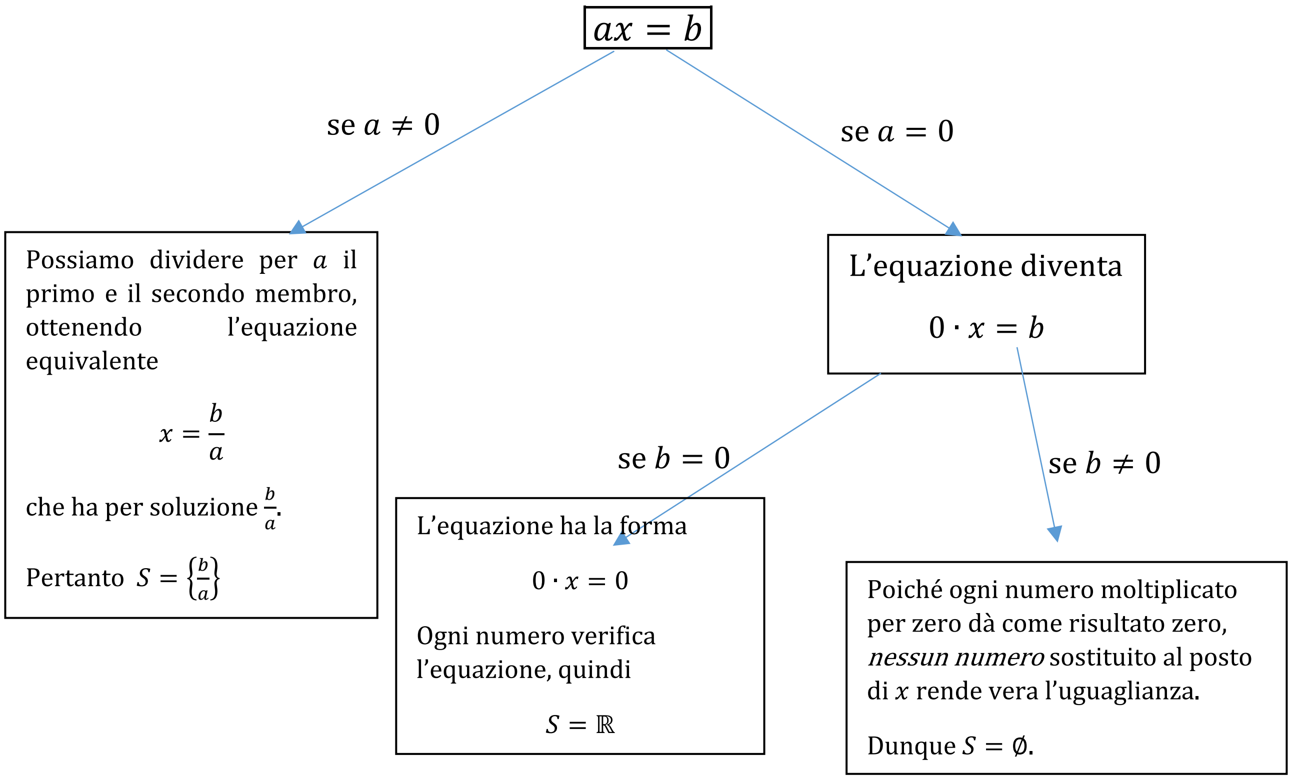
Teorema.
È data l'equazione intera di primo grado in forma canonica

$$ax = b \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Allora

- se $a \neq 0$ ha un'unica soluzione $S = \left\{\frac{b}{a}\right\}$
- se $a = 0$ e $b = 0$ ha per soluzione ogni numero reale, dunque $S = \mathbb{R}$
- se $a = 0$ e $b \neq 0$ non ha soluzione, dunque $S = \emptyset$

Dimostrazione.



Teorema.
Data un'equazione di primo grado intera, è sempre possibile trovare un'equazione in forma canonica ad essa equivalente (ovvero con le stesse soluzioni).

Pertanto un'equazione di primo grado intera può avere una soluzione, nessuna soluzione o essere verificata per ogni numero reale.

Applicando il principio di equivalenza possiamo infatti trasportare i termini con la x al primo membro e i termini noti al secondo membro, e svolgere poi i calcoli al primo e al secondo membro ottenendo l'equazione equivalente in forma canonica $ax = b$.

In seguito alle considerazioni precedenti, possiamo dare uno schema risolutivo per le equazioni lineari.

1. Sviluppiamo gli eventuali calcoli al primo e al secondo membro
2. Portiamo al primo membro i termini con l'incognita e al secondo membro i termini noti
3. Svolgiamo i calcoli nei due membri ottenendo la forma normale $ax = b$
4. Se $a \neq 0$ isoliamo l'incognita e scriviamo la soluzione, altrimenti stabiliamo l'equazione non ha soluzione o è verificata per ogni numero reale

Vediamo qualche esempio di risoluzione.

Esempio 1.
Risolviamo

$$3(x+5) = 4x + 17$$

Svolgiamo i calcoli

$$3x + 15 = 4x + 17$$

e trasportiamo i termini in x al primo membro e i termini noti al secondo membro

$$3x - 4x = 17 - 15$$

ovvero

$$-x = 2$$

Per isolare la x dobbiamo cambiare di segno: ciò equivale a moltiplicare per -1 (al primo e *anche al secondo membro*): otteniamo così

$$x = -2$$

che è equivalente all'equazione di partenza e che ha come unica soluzione il numero 2.

Quindi $S = \{-2\}$.

Esempio 2.
Risolviamo

$$(2x+3)^2 - 2x(x+3) = 5x - 2x(1-x)$$

Svolgiamo i calcoli

$$4x^2 + 12x + 9 - 2x^2 - 6x = 5x - 2x + 2x^2$$

Osserviamo che al primo membro abbiamo i termini $4x^2 - 2x^2 = 2x^2$ che compare anche al secondo membro, e sappiamo che si possono elidere; per ricondurci alla forma $x = N$ portiamo i termini in x al primo membro e i termini noti al secondo e otteniamo

$$12x - 6x - 5x + 2x = -9$$

e svolgendo i calcoli ricaviamo la forma canonica

$$3x = -9$$

Dividiamo infine per 3 i due membri

$$x = -3$$

Pertanto $S = \{-3\}$.

Esempio 3.
Risolviamo

$$(x+3)^2 - (x-3)^2 = 12x$$

Svolgiamo i calcoli

$$x^2 + 6x + 9 - x^2 + 6x - 9 = 12x$$

da cui

$$12x = 12x$$

L'equazione ottenuta è equivalente a quella di partenza ed è evidentemente verificata per ogni valore di x; è possibile comunque ridurla in forma normale portando tutto al primo membro

$$12x - 12x = 0 \Longrightarrow 0x = 0$$

da cui segue, come abbiamo visto $S = \mathbb{R}$.

Esempio 4.
Risolviamo l'equazione lineare

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} = 4 + \frac{x}{6}$$

Osserviamo che diversamente dai casi precedenti troviamo dei coefficienti razionali non interi.

Possiamo procedere in diversi modi, tutti equivalenti tra loro: vediamoli.

Primo modo.
Determiniamo il minimo comune multiplo fra tutti i denominatori, al primo e al secondo membro; in questo caso $mcm(3,2,6) = 6$.

Dopodichè esprimiamo il primo e il secondo membro in frazioni che hanno 6 come denominatore

$$\frac{4x+3}{6} = \frac{24+x}{6}$$

A questo punto possiamo moltiplicare i due membri per il denominatore: è un'operazione elementare e non cambia le soluzioni

$$6 \cdot \frac{4x+3}{6} = \frac{24+x}{6} \cdot 6$$

e semplificando otteniamo

$$4x + 3 = 24 + x$$

che è un’equazione a coefficienti interi già trattata: mandiamo i termini con l’incognita al primo membro e i termini noti al secondo e svolgiamo i calcoli

$$3x = 21$$

In questo caso possiamo ricavare x dividendo per 3

$$\frac{3x}{3} = \frac{21}{3}$$

da cui, infine

$$x = 7$$

Pertanto $S = \{7\}$.

Secondo modo.
Dall’equazione

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} = 4 + \frac{x}{6}$$

moltiplichiamo i due membri per il minimo comune multiplo dei denominatori

$$6 \cdot \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\right) = \left(4 + \frac{x}{6}\right) \cdot 6$$

e applichiamo la proprietà distributiva

$$4x + 3 = 24 + x$$

ottenendo l’equazione già vista.

Terzo modo.
Da

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} = 4 + \frac{x}{6}$$

possiamo isolare i termini con l’incognita

$$\frac{2}{3}x - \frac{x}{6} = 4 - \frac{1}{2}$$

e svolgiamo i calcoli

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)x = \frac{7}{2} \Longrightarrow \frac{3}{6}x = \frac{7}{2} \Longrightarrow \frac{1}{2}x = \frac{7}{2}$$

Infine moltiplicando per 2 otteniamo $x = 7$ come nei casi precedenti.

2.3 Particolari equazioni di grado superiore al primo

Vediamo come risolvere particolari equazioni di grado superiore al primo: la strategia risolutiva è fondata sul seguente risultato.

Legge di annullamento del prodotto.
Il prodotto fra due numeri è zero se e solo se almeno uno dei fattori è zero.

In altri termini, dati $a, b \in \mathbb{R}$

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.
Risolviamo l'equazione

$$(x-1)(x+3) = 0$$

Osserviamo anzitutto che, se svolgessimo i calcoli, otterremo al primo membro un polinomio di secondo grado: dunque l'equazione da risolvere ha grado due.

Ci chiediamo quando il prodotto tra $x-1$ e $x+3$ è zero: grazie alla legge di annullamento del prodotto sappiamo che questo avviene se e solo se

$$x-1=0 \ \vee x+3=0$$

ovvero se $x=1$ o se $x=-3$: la soluzione dell'equazione è pertanto $S=\{-3,1\}$.

Esempio 2.
Risolviamo l'equazione

$$x^2-5x=0$$

Anche in questo caso abbiamo un'equazione di secondo grado.

Diversamente dall'esempio precedente l'espressione al primo membro non è scomposta in fattori: non possiamo quindi applicare la legge di annullamento del prodotto perché, semplicemente, non abbiamo prodotti.

Possiamo però scomporre in fattori il primo membro raccogliendo il termine comune x: otteniamo così

$$x(x-5)=0$$

Ora, grazie alla legge di annullamento del prodotto, sappiamo che questa uguaglianza è vera se e solo se $x=0$ o $x=5$.

Quindi $S=\{0,5\}$.

Esempio 3.
Risolviamo l'equazione di terzo grado

$$x^3-2x^2=2-x$$

Per poter applicare la legge di annullamento del prodotto è necessario avere un'equazione con il secondo membro uguale a zero, perciò

$$x^3-2x^2+x-2=0$$

Ora dobbiamo scomporre in fattori il primo membro: possiamo raccogliere parzialmente

$$x^2(x-2)+1(x-2)=0$$

$$(x-2)(x^2+1)=0$$

Quest'ultima equazione è verificata se $x=2$ o se $x^2+1=0$.

Osserviamo che $x^2+1=0$ non può essere vera per alcun valore di x: infatti isolando x^2 otteniamo $x^2=-1$ che è un'uguaglianza sempre falsa perché un quadrato non è mai negativo.

Quindi il secondo fattore non è mai nullo e l'equazione è verificata solo per $x=2$.

In definitiva $S=\{2\}$.

Esempio 4.
Risolviamo l'equazione di terzo grado

$$x^3+x=2x^2$$

Portiamo tutto al primo membro e scomponiamo in fattori

$$x^3-2x^2+x=0$$

$$x(x^2-2x+1)=0$$

$$x(x-1)^2=0$$

Per la legge di annullamento del prodotto l'uguaglianza è verificata se

$$x=0 \ \vee \ (x-1)^2=0$$

Ma $(x-1)^2=0$ se $x=1$, dunque la soluzione è $S=\{0,1\}$.

Esaminando gli esempi precedenti, siamo in grado di dare un procedimento risolutivo generale per risolvere equazioni di grado superiore al primo.

1. Svolgiamo gli eventuali calcoli e portiamo tutto al primo membro
2. Scomponiamo il primo membro in fattori di primo grado o in quadrati
3. Risolviamo le equazioni ottenute ponendo uguali a zero i fattori

2.4 Equazioni di primo grado fratte

Abbiamo visto che chiamiamo fratta un'equazione in cui l'incognita compare al denominatore di una frazione.

La differenza – fondamentale – tra un'equazione fratta e una intera è che in generale in un'equazione fratta non tutti i valori della incognita sono sostituibili al posto della incognita, cosa che avviene per le equazioni intere.

Ricordiamo che un numero per essere soluzione deve soddisfare *due* condizioni: deve poter essere sostituibile al posto della incognita (ovvero deve appartenere alle condizioni di esistenza) e deve rendere vera l'uguaglianza.

Quindi in un'equazione intera tutti i numeri soddisfano le condizioni di esistenza, cosa che non avviene in generale in una equazione fratta.

Esempio.
Consideriamo l'equazione intera

$$x - 2 = 5$$

In questo caso *ogni valore* è sostituibile al posto della incognita: si ottiene sempre una uguaglianza che *ha significato,* indipendentemente che che sia vera o falsa.

- se $x = 9$ otteniamo l'uguaglianza $9 - 2 = 5$ che *ha senso* ed è falsa
- se $x = 7$ otteniamo $7 - 2 = 5$ che *ha senso* ed è vera: quindi il numero 7 è soluzione.

Consideriamo l'equazione fratta

$$\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-3} = 1$$

In questo caso non tutti i numeri sono sostituibili: se sostituiamo al posto della incognita il numero 1 o il numero 7 otteniamo una espressione priva di significato, dunque

$$CE: x \neq 1 \wedge x \neq 3$$

Questo significa che 1 e 3 non soddisfano la prima condizione affinchè un numero sia soluzione: tutti gli altri numeri sono *candidati* ad essere soluzione (e lo saranno se sostituiti al posto di x generano un'uguaglianza vera).

Vediamo qualche esempio di risoluzione di equazioni fratte.

Esempio 1.
Cerchiamo le – eventuali -soluzioni dell'equazione fratta

$$\frac{2}{x-1} + 4 = \frac{4x}{x+2}$$

Un numero per poter essere soluzione deve poter essere sostituito, quindi $CE: x \neq 1 \wedge x \neq -2$.

La nostra ricerca si è quindi ristretta nell'insieme dei numeri diversi da 1 e da -2.

D'ora in avanti considereremo l'equazione non per ogni valore di x, ma per ogni valore di x che non sia nè 1 nè -2.

A questo punto scriviamo i due membri dell'equazione come frazioni con lo stesso denominatore comune, dato dal minimo comune multiplo fra i denominatori $x - 1$ e $x + 2$

$$\frac{2(x+2) + 4(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = \frac{4x(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

È fondamentale osservare ora che è possibile passare ad una *equazione equivalente* moltiplicando i due membri per il denominatore $(x - 1)(x + 2)$, *grazie alle condizioni di esistenza:* sotto le CE, infatti, $(x - 1)(x + 2) \neq 0$.

Il principio di equivalenza ci assicura che se moltiplichiamo i due membri di una equazione *per un numero non nullo* si ottiene una equazione equivalente a quella di partenza.

$$(x-1)(x+2)\cdot\frac{2(x+2)+4(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)}=\frac{4x(x-1)}{(x-1)(x+2)}\cdot(x-1)(x+2)$$

$$2(x+2)+4(x-1)(x+2)=4x(x-1)$$

Svolgiamo i calcoli e otteniamo

$$x=\frac{2}{5}$$

che è un'equazione equivalente a quella di partenza per tutti i valori di x nelle condizioni di esistenza.

La soluzione di $x=\frac{2}{5}$ è il numero $\frac{2}{5}$, *che soddisfa le condizioni di esistenza.*

Diremo che è una *soluzione accettabile* e la soluzione della equazione fratta è $S=\left\{\frac{2}{5}\right\}$.

Esempio 2.
Risolviamo l'equazione fratta

$$\frac{2x-1}{x-1}=1-\frac{1}{1-x}$$

In questo caso i due denominatori sono opposti: conviene operare su una delle due frazioni per renderli uguali. Otteniamo

$$\frac{2x-1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$$

Le condizioni di esistenza sono $CE: x\neq 1$.

Ciò significa che d'ora in avanti consideremo l'incognita come un numero qualunque, *tranne 1.*

Portiamo i due membri allo stesso denominatore

$$\frac{2x-1}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}$$

Possiamo passare ad una equazione equivalente moltiplicando i due membri per $x-1$, perché sotto le condizioni di esistenza è una quantità diversa da zero

$$(x-1)\cdot\frac{2x-1}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}\cdot(x-1)$$

Semplificando otteniamo

$$x=1$$

La soluzione di questa equazione è il numero 1: ma per questo valore l'equazione non è equivalente all'equazione fratta di partenza.

Il numero 1 non può essere soluzione dell'equazione perché non appartiene alle condizioni di esistenza.

Diremo che 1 *non è una soluzione accettabile.*

L'equazione non ha quindi soluzioni, pertanto $S = \emptyset$.

Esempio 3.
Risolviamo

$$\frac{x^2+x+2}{x^2+2x}-\frac{1}{x}=\frac{2x}{x+2}-1$$

Per trovare le CE, scomponiamo anzitutto in fattori i denominatori

$$\frac{x^2+x+2}{x(x+2)}-\frac{1}{x}=\frac{2x}{x+2}-1$$

Quindi $CE: x \neq 0 \wedge x \neq -2$.

Scriviamo i due membri come frazioni col denominatore comune $x(x+2)$, dato dal minimo comune multiplo dei denominatori

$$\frac{x^2+x+2-(x+2)}{x(x+2)}=\frac{2x^2-x(x+2)}{x(x+2)}$$

Moltiplichiamo i due membri per il denominatore comune $x(x+2)$, non nullo grazie alle CE, ottenendo l'equazione equivalente

$$x^2+x+2-(x+2)=2x^2-x(x+2)$$

Svolgendo i calcoli e isolando la x otteniamo

$$x=0$$

che non è una soluzione accettabile, quindi $S = \emptyset$.

Esempio 4.
Risolviamo

$$\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+1}=\frac{5}{x^2-3x-4}$$

Scomponiamo in fattori i denominatori

$$\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+1}=\frac{5}{(x-1)(x-4)}$$

e troviamo le $CE: x \neq 1 \wedge x \neq 4$.

Il denominatore comune è $(x-4)(x-1)$, quindi

$$\frac{x+1-(x-4)}{(x-1)(x-4)}=\frac{5}{(x-1)(x-4)}$$

Moltiplichiamo i due membri per il denominatore comune, ottenendo *per i valori delle CE* l'equazione equivalente

$$x+1-(x-4)=5$$

Svolgendo i calcoli otteniamo

$$0 \cdot x = 0$$

Questa equazione, equivalente all'equazione di partenza per i valori di $x \neq 1$ e $x \neq 4$, ha per soluzione ogni numero reale.

Dunque anche l'equazione di partenza ha per soluzione tutti i numeri diversi da 1 e da 4.

D'altra parte 1 e 4 non possono essere soluzione perché non appartengono alle condizioni di esistenza (non sono, cioè, valori sostituibili).

Pertanto $S: x \neq 1 \wedge x \neq 4$ o, in altri termini $S = \mathbb{R} - \{1,4\}$.

Siamo ora in grado di descrivere i passi necessari per risolvere una equazione fratta.

1. Scomponiamo i denominatori in fattori (se otteniamo fattori opposti, sistemiamo le frazioni)
2. Troviamo le condizioni di esistenza CE
3. Esprimiamo il primo e il secondo membro come frazioni con lo stesso denominatore dato dal *mcm* dei fattori dei denominatori
4. Elidiamo i denominatori, moltiplicando i due membri per il denominatore comune
5. Risolviamo l'equazione intera ottenuta, equivalente a quella di partenza per i valori dell'incognita nelle CE
6. Verifichiamo l'accettabilità della soluzione
7. Scriviamo la soluzione dell'equazione fratta di partenza

2.5 Equazioni parametriche

Consideriamo le equazioni $3x = 4$, $4x = 5$, $7x = 8$, $0x = 1$…

Sono tutte equazioni distinte tra loro, ma con la stessa struttura: un numero moltiplicato per l'incognita x, è eguagliato al successivo del numero.

La totalità di queste equazioni possono essere descritte dall'equazione

$$ax = a + 1$$

dove la lettera x è l'incognita e la lettera a rappresenta un qualunque numero ed è chiamata *parametro.*

Ad esempio, se $a = 3$ ritroviamo $3x = 4$, se $a = 4$ otteniamo $4x = 5$ e così via.

Quindi l'espressione $ax = a + 1$ rappresenta *infinite equazioni* di una stessa famiglia, dove ogni equazione è ottenuta attribuendo un valore al parametro a.

Osserviamo che sia x che a sono lettere, ma con ruoli assolutamente diversi: a rappresenta un numero e x rappresenta l'incognita.

Un'equazione che contiene sia l'incognita che un parametro prende il nome di equazione parametrica (o letterale).

Come consuetudine i parametri sono indicati con le lettere a, b, k, t.

Risolvere un'equazione parametrica significa individuare - se esistono - dei valori del parametro tali che l'equazione corrispondente

- non abbia soluzione
- abbia infinite soluzioni
- abbia una sola soluzione e, in questo caso, trovare l'espressione che la descrive (solitamente dipendente dal parametro).

Esempio.
Risolviamo l'equazione parametrica

$$a(a - 1)x = a - 1$$

Per risolvere un'equazione di primo grado sappiamo che dobbiamo portarci – se possibile – a una equazione del tipo $x = N$, ovvero dobbiamo cercare di isolare l'incognita x.

In questo caso dunque dovremmo dividere per $a(a - 1)$: ma questa operazione non è lecita per qualsiasi valore del parametro a.

Se $a = 0$ o se $a = 1$ non è possibile isolare la x perché non possiamo dividere per $a(a - 1)$, essendo nulla in prossimità di questi valori.

Studiamo quindi le soluzioni dell'equazione ottenuta da questi valori particolari dei parametri.

- se $a = 0$ otteniamo l'equazione $0(0 - 1)x = 0 - 1$, ovvero $0x = -1$ che non ha soluzione
- se $a = 1$ ricaviamo l'equazione corrispondente $1(1 - 1)x = 1 - 1$, ovvero $0x = 0$ che ha infinite soluzioni

Abbiamo scoperto quindi il comportamento dell'equazione se il parametro è uguale a 0 o a 1: possiamo supporre ora che sia un qualunque numero diverso da 0 e 1.

Sia dunque $a \neq 0 \wedge a \neq 1$.

Sotto queste condizioni possiamo dividere i membri dell'uguaglianza per $a(a - 1)$ ottenendo

$$x = \frac{a - 1}{a(a - 1)}$$

e, semplificando

$$x = \frac{1}{a}$$

Per gli infiniti valori di a diversi da 0 e 1 il sistema ha soluzione, unica, data da $\frac{1}{a}$.

In definitiva

- se $a = 0$ il sistema non ha soluzione: $S = \emptyset$
- se $a = 1$ il sistema è verificato per ogni numero reale: $S = \mathbb{R}$
- se $a \neq 0 \land a \neq 1$ il sistema ha un'unica soluzione: $S = \left\{\frac{1}{a}\right\}$

In questo modo abbiamo risolto con un unico procedimento *infinite equazioni,* ottenute attribuendo un arbitrario valore del parametro nell'equazione: ad esempio

- se $a = 8$ l'equazione corrispondente è $56x = 7$ con soluzione $\frac{1}{8}$
- se $a = 58$ l'equazione corrispondente è $3306x = 57$ con soluzione $\frac{1}{58}$

e così via…

Le equazioni parametriche si risolvono, in genere, con ragionamenti simili a quelli visti nell'esempio precedente.

Occorre però portarci preliminarmente a una forma che ci consenta di effettuare questi procedimenti.

Diciamo che un'equazione parametrica intera è *ridotta in forma normale (o canonica)* se è del tipo

$$x \cdot P(a) = Q(a)$$

dove $P(a)$ e $Q(a)$ sono polinomi in a scomposti in fattori.

È sempre possibile portare un'equazione parametrica intera in forma canonica procedendo così

1. si svolgono i calcoli

2. si mandano i monomi che contengono l'incognita al primo membro e gli altri al secondo membro
3. si raccoglie la x al primo membro
4. si scompone in fattori (se è possibile) il termine che moltiplica x al primo membro e il secondo membro

Vediamo un esempio.

Esempio.
Risolviamo la seguente equazione parametrica, portandola preventivamente in forma canonica

$$a(ax - x - 6) = a^2 + 3(4x + 3)$$

L'equazione non è, evidentemente, in forma normale: svolgiamo i calcoli

$$a^2x - ax - 6a = a^2 + 12x + 9$$

Portiamo quindi i termini con x al primo membro e gli altri al secondo membro

$$a^2x - ax - 12x = a^2 + 9 + 6a$$

Raccogliamo x al primo membro

$$x(a^2 - a - 12) = a^2 + 9 + 6a$$

e scomponiamo in fattori $a^2 - a - 12$ e $a^2 + 9 + 6a$, ottenendo così

$$x(a - 4)(a + 3) = (a + 3)^2$$

Abbiamo quindi ottenuto l'equazione in forma canonica.

Possiamo procedere quindi in modo simile all'esempio precedente.

Per isolare l'incognita dovremmo dividere i due membri per $(a - 4)(a + 3)$, ma questo è possibile solo se $a \neq 4$ e $a \neq -3$: trattiamo a parte questi casi.

Se $a = 4$ l'equazione diventa $x(4 - 4)(4 + 3) = (4 + 3)^2$, ovvero $x \cdot 0 = 49$ che non ha soluzione.

Se $a = -3$ l'equazione diventa $x(-3 - 4)(-3 + 3) = (-3 + 3)^2$, ovvero $x \cdot 0 = 0$ che è verificata per ogni valore reale di x.

Esaminiamo quindi i casi rimanenti: sia dunque $a \neq 4 \wedge a \neq -3$.

Possiamo ora dividere i due membri per $(a - 4)(a + 3)$ ottenendo

$$\frac{x(a-4)(a+3)}{(a-4)(a+3)} = \frac{(a+3)^2}{(a-4)(a+3)}$$

e semplificando

$$x = \frac{a+3}{a-4}$$

In definitiva

- se $a = 4$ l'equazione non ha soluzione: $S = \emptyset$
- se $a = -3$ l'equazione è sempre verificata: $S = \mathbb{R}$
- se $a \neq 4 \wedge a \neq -3$ l'equazione ha un'unica soluzione, data da $S = \left\{\frac{a+3}{a-4}\right\}$

Sinora abbiamo esaminato scritture che descrivono equazioni *qualunque sia il valore che attribuiamo al parametro:* se consideriamo

$$ax = 1$$

vediamo che questa scrittura descrive una equazione in x, qualunque sia il valore che decidiamo di attribuire al parametro a.

Questo non è sempre vero: esaminiamo ad esempio

$$x = \frac{1}{a}$$

Nel caso in cui $a = 0$ la scrittura diventa $x = \frac{1}{0}$ che *non è un'equazione, ma una scrittura priva di significato.*

D'altra parte, se $a \neq 0$ la scrittura è una equazione (in questo caso di risoluzione immediata: $S = \left\{\frac{1}{a}\right\}$).

Le condizioni a cui deve soddisfare il parametro affinchè la scrittura data sia un'equazione le chiameremo *condizioni sul parametro* e le indicheremo con CP.

Quindi se dobbiamo risolvere una equazione parametrica intera in cui il parametro compare in un denominatore, per prima cosa dobbiamo trovare le condizioni sul parametro (ovvero le condizioni cui deve soddisfare il parametro affinché la scrittura rappresenti una equazione), dopodiché si risolve come abbiamo visto in precedenza, cercando la forma normale e discutendo.

Esempio.
Risolviamo la seguente equazione parametrica, dove compare il parametro al denominatore

$$\frac{x - a - 4}{3a} + \frac{x + a}{a} = \frac{x + 1}{3}$$

La scrittura descrive una equazione in x se il parametro è diverso da zero, perciò $CP: a \neq 0$.

D'ora in avanti procederemo considerando a come un numero qualunque, *ma non nullo.*

Scriviamo i due membri come frazioni con lo stesso denominatore comune

$$\frac{x - a - 4 + 3(x + a)}{3a} = \frac{a(x + 1)}{3a}$$

e passiamo all'equazione equivalente moltiplicando i due membri per $3a$ (perché $3a \neq 0$)

$$x - a - 4 + 3(x + a) = a(x + 1)$$

Svolgiamo i calcoli e portiamo i termini con l'incognita al primo membro e gli altri al secondo membro

$$x + 3x - ax = a + 4 - 3a + a$$

Raccogliamo x e svolgiamo i calcoli al secondo membro

$$x(4 - a) = 4 - a$$

Per isolare x occorre dividere per $4 - a$, ma questo è possibile se $a \neq 4$.

Se $a = 4$ l'equazione diventa $x \cdot 0 = 0$ che ha per soluzione ogni numero reale.

Se $a \neq 4$, dividendo i due membri per $4 - a$ otteniamo $x = 1$.

In definitiva

- se $a = 0$ la scrittura è priva di significato
- se $a = 4$ l'equazione ha per soluzione ogni numero reale: $S = \mathbb{R}$
- se $a \neq 0 \land a \neq 4$ l'equazione ha soluzione $S = \{1\}$

Abbiamo finora trattato le equazioni parametriche intere, ovvero equazioni in cui l'incognita non compare al denominatore e abbiamo visto che il procedimento risolutivo subisce delle variazioni nel caso in cui il parametro compaia o meno al denominatore di qualche frazione.

Ora vogliamo esaminare le equazioni parametriche fratte e vedremo come il procedimento può cambiare a seconda che il parametro si trovi o meno al denominatore di una frazione.

Vediamo quindi un paio di esempi di equazioni parametriche fratte, in cui il parametro non compare al denominatore di alcuna frazione.

Esempio 1.
Risolviamo l'equazione parametrica fratta

$$\frac{a - 1}{x - 2} = 1$$

Osserviamo anzitutto che non abbiamo condizioni sul parametro, ovvero che la scrittura rappresenta un'equazione fratta nella incognita x per qualunque valore di a: scriveremo $CP: \forall a \in \mathbb{R}$.

D'ora in avanti tratteremo a come fosse un numero qualunque a tutti gli effetti.

Occupiamoci ora dell'incognita: non tutti i numeri possono essere soluzione, solo quelli sostituibili.

Cercheremo le soluzioni dell'equazione fra i numeri diversi da 2, pertanto $CE: x \neq 2$.

A questo punto esprimiamo i due membri come frazione con lo stesso denominatore comune

$$\frac{a-1}{x-2}=\frac{x-2}{x-2}$$

e moltiplichiamo per $x-2$, ottenendo una equazione equivalente perché, a causa delle condizioni di esistenza, è diversa da zero

$$a-1=x-2$$

Isoliamo quindi l'incognita e otteniamo

$$x=a+1$$

Ora dobbiamo prestare grande attenzione: in tutti i casi visti in precedenza (nelle equazioni non fratte) il numero $a+1$ sarebbe stata una soluzione. In questo caso non è detto: essendo l'equazione fratta abbiamo delle CE, che costituiscono condizione restrittive sulla incognita.

In questo caso il numero $a+1$ non è una soluzione accettabile nel caso in cui $a+1=2$, ovvero se $a=1$, ed è accettabile altrimenti (ovvero se $a\neq 1$).

In definitiva

- se $a=1$ l'equazione non ha soluzione: $S=\emptyset$
- se $a\neq 1$ l'equazione ha soluzione $S=\{a+1\}$

Esempio 2.
Risolviamo l'equazione parametrica fratta

$$\frac{a}{x-3}=a-1$$

Anche in questo caso non abbiamo condizioni sul parametro: la scrittura rappresenta un'equazione fratta in x per qualunque valore di a. Dunque CP: $\forall a\in\mathbb{R}$.

D'ora in avanti tratteremo a come fosse un numero qualunque a tutti gli effetti.

Occupiamoci ora dell'incognita: non tutti i numeri possono essere soluzione, solo quelli sostituibili.

Cercheremo le soluzioni dell'equazione fra i numeri diversi da 3, pertanto CE: $x\neq 3$.

A questo punto esprimiamo i due membri come frazione con lo stesso denominatore comune

$$\frac{a}{x-3}=\frac{(a-1)(x-3)}{x-3}$$

e moltiplichiamo per $x-3$, ottenendo l'equazione equivalente

$$a=ax-3a-x+3$$

che in forma normale diventa

$$x(a-1)=4a+3$$

Per isolare la x dobbiamo dividere per $a-1$ e questo è possibile se $a\neq 1$.

Quindi se $a=1$ l'equazione diventa $x\cdot 0=7$ che non ha soluzioni.

Se $a\neq 1$ possiamo dividere per $a-1$ ambo i membri ottenendo l'equazione equivalente

$$x = \frac{4a+3}{a-1}$$

Se non avessimo condizioni su x avremmo già ottenuto la soluzione, ma a causa delle CE sappiamo che la x non può valere 2.

Quindi $\frac{4a+3}{a-1}$ non è una soluzione accettabile se $\frac{4a+3}{a-1} = 2$ ovvero, risolta, se $a = -6$ e in corrispondenza di questo valore l'equazione non ha soluzioni.

Naturalmente $\frac{4a+3}{a-1} \neq 2$ se $a \neq -6$ e in questo caso la soluzione è accettabile.

In definitiva

- se $a = 1 \vee a = 6$ l'equazione non ha soluzioni: $S = \emptyset$
- se $a \neq 1 \wedge a \neq 6$ l'equazione ha soluzione $S = \left\{\frac{4a+3}{a-1}\right\}$

È importante mettere in luce il ruolo delle condizioni sul parametro (CP) e delle condizioni di esistenza (CE).

- *le condizioni sul parametro CP* sono le condizioni che deve rispettare il parametro affinchè la scrittura rappresenti una equazione nell'incognita x.

Sono le prime da stabilire e, una volta trovate, consideriamo il parametro come un numero a tutti gli effetti (che soddisfa le CP).

- *le condizioni di esistenza CE* sono le condizioni che deve rispettare l'incognita affinchè sia sostituibile nell'equazione, considerando il parametro come un numero (una volta trovate le CP).

Queste considerazioni sono essenziali per determinare in modo corretto le CP e le CE nel caso di una equazione parametrica fratta, in cui l'incognita compare al denominatore.

Vediamo come comportarci nel caso seguente

$$\frac{a-1}{x-a} = 1$$

Abbiamo visto che la prima cosa di cui occuparci sono le condizioni sul parametro, ovvero i *valori* da sostituire al posto del parametro affinchè la scrittura sia una equazione nella incognita x. Ad esempio

- se $a = 7$ otteniamo $\frac{7-1}{x-7} = 1$, ovvero $\frac{6}{x-7} = 1$ che è una equazione fratta in x: il valore 7 è accettabile per il parametro a
- se $a = 0$ risulta $\frac{1}{x-0} = 1$, ovvero $\frac{1}{x} = 1$: anche in questo caso otteniamo una equazione nell'incognita x, pertanto zero è ancora un valore ammissibile per il parametro

Notiamo che in questo caso *ogni valore* che sostituiamo al posto del parametro ci restituisce una equazione nella incognita x, pertanto *non abbiamo condizioni sul parametro* quindi

$$CP: \forall a \in \mathbb{R}$$

Possiamo considerare ora il parametro a come un numero a tutti gli effetti.

Occupiamoci ora delle condizioni di esistenza, che riguardano l'incognita x.

Affinchè un valore sia sostituibile nell'equazione al posto di x deve accadere che x sia diversa dal "numero" a, pertanto

$$CE: x \neq a$$

Ora possiamo procedere a risolvere l'equazione, con la strategia che abbiamo già descritto.

Esprimiamo i due membri come frazioni con lo stesso denominatore comune

$$\frac{a-1}{x-a} = \frac{x-a}{x-a}$$

e svolgendo i calcoli otteniamo

$$x = 2a - 1$$

Verifichiamo l'accettabilità della "soluzione": visto che abbiamo delle condizioni su x, non tutti i valori sono necessariamente ammissibili. Se

$$2a - 1 = a$$

la soluzione non è accettabile e l'equazione non ha soluzione: risolvendo l'equazione troviamo che questo avviene se $a = 1$.

Naturalmente se $2a - 1 \neq a$, ovvero se $a \neq 1$, la soluzione è accettabile.

In definitiva

- se $a = 1$ l'equazione non ha soluzioni: $S = \emptyset$
- se $a \neq 1$ l'equazione ha soluzione $S = \{2a - 1\}$

Vediamo qualche esempio di risoluzione per equazioni parametriche fratte, in cui il parametro compare al denominatore.

Esempio 1.
Risolviamo

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{x-a} = \frac{a}{ax - x - a^2 + a}$$

Anzitutto scomponiamo dove possibile i denominatori in fattori: utilizzando il raccoglimento parziale al secondo membro otteniamo

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{x-a} = \frac{a}{(x-a)(x-1)}$$

- Troviamo per prima cosa le condizioni sul parametro a

$$CP: a \neq 1$$

D’ora in avanti consideriamo a come fosse un numero qualunque, ma diverso da 1.

- Determiniamo quindi le condizioni di esistenza sulla incognita x

$$CE: x \neq a$$

Una volta individuato il denominatore comune $(x-a)(x-1)$, esprimiamo i due membri come frazioni con questo denominatore

$$\frac{x-a+a-1}{(x-a)(x-1)} = \frac{a}{(x-a)(x-1)}$$

Moltiplichiamo quindi i due membri per il denominatore comune e ricaviamo la x

$$x = a + 1$$

L’espressione trovata non è una soluzione accettabile se $a+1=a$, ma questo non avviene per alcun valore di a: dunque l’espressione trovata è sempre soluzione.

In definitiva
- se $a=1$ l’espressione non ha significato
- se $a \neq 1$ l’equazione ha soluzione $S = \{a+1\}$

Esempio 2.
Risolviamo

$$1 - \frac{5}{a+2} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x(a+2)}$$

I denominatori sono già scomposti in fattori.

- Le condizioni sul parametro sono $CP: a \neq -2$
- Le condizioni di esistenza sono $CE: x \neq 0$

Esprimiamo il primo e il secondo membro in frazioni con lo stesso denominatore

$$\frac{x(a+2)-5x}{x(a+2)} = \frac{(a+2)-2}{x(a+2)}$$

e, svolgendo i calcoli otteniamo la forma normale

$$(a-3)x = a$$

Se $a=3$ l’equazione diventa $0 \cdot x = 3$ che non ha soluzioni.

Se $a \neq 3$ possiamo dividere per $a-3$ ottenendo $x = \frac{a}{a-3}$ che fornisce una soluzione accettabile se $\frac{a}{a-3} \neq 0$, ovvero se $a \neq 0$. In caso contrario, per $a=0$, la soluzione non è accettabile.

In definitiva
- se $a=1$ l’espressione non ha significato
- se $a=3 \vee a=0$ l’equazione non ha soluzione: $S=\emptyset$
- se $a \neq 0 \wedge a \neq 1 \wedge a \neq 3$ l’equazione ha soluzione $S = \left\{\frac{a}{a-3}\right\}$

2.6 Esercizi

Esercizio 1.
Scrivi una equazione in una incognita tale che

a) $S = \emptyset$
b) $S = \mathbb{R}$
c) $S = \mathbb{R} - \{1\}$
d) $S = \mathbb{R} - \{1,2\}$

Esercizio 2.
Scrivi una equazione in una incognita di secondo grado tale che

a) $S = \emptyset$
b) $S = \{1,2\}$
c) $S = \mathbb{R}$

Esercizio 3.
Scrivi una equazione in due incognite tale che

a) $S = \emptyset$
b) $S = \{(1,2)\}$
c) $S = \mathbb{R}^2$

Esercizio 4.
Stabilisci se le seguenti uguaglianze sono identità

$a)\ x = x$ $\qquad b)\ \frac{x}{x} = 1$ $\qquad c)\ x^2 + 2x = x(x+2)$

$d)\ 1 - 2x = \frac{1-4x^2}{1+2x}$ $\qquad e)\ 1 - \frac{2x+y}{x-y} = \frac{x+y}{y-x} - \frac{y}{x-y}$ $\qquad f)\ \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x}$

[$a)$ sì; $b)$ *no*; $c)$ sì; $d)$ *no*; $e)$ sì; $f)$ *no*]

Esercizio 5.
Data l'equazione

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{x-1} = 6$$

stabilisci, motivando, se sono soluzioni i numeri 1, $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$.

Esercizio 6.
Trova una equazione equivalente ad ognuna delle seguenti equazioni

$a)\ 2x - 1 = 3$ $\qquad b)\ \frac{x}{x} = 1$ $\qquad c)\ \frac{x}{x} = 0$

Esercizio 7.

Risolvi le equazioni seguenti indicando ad ogni passaggio il principio di equivalenza applicato

$a)\ 3x-4=x+6$ $\qquad b)\ \frac{x}{2}+1=\frac{x-1}{3}+\frac{8+x}{6}$

$c)\ \frac{2+x}{x}=\frac{x+2}{x+1}$ $\qquad d)\ \frac{x}{x-1}=\frac{x}{x-1}$

$[a)\ S=\{5\};b)\ S=\{0\};c)\ S=\emptyset;d)\ S=\mathbb{R}-\{1\}]$

Esercizio 8.
Data l'equazione

$$(a-1)x=b-2$$

trova i valori dei parametri a,b in modo che

a) l'equazione non abbia soluzione
b) l'equazione abbia infinite soluzioni
c) l'equazione abbia una sola soluzione

$[a)\ a=1,b\neq 2;b)\ a=1,b=2;c)\ a\neq 1]$

Esercizio 9.
Risolvi le seguenti equazioni lineari intere

$a)\ \frac{3}{2}x+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}x+1$ $\qquad b)\ x+3(1-x)=2+5x$

$c)\ 3(4x-1)+2x=7(2x-5)$ $\qquad d)\ 3(x+2)-2x-1=10-3(x-1)-4x$

$e)\ (x-5)^2=(x+1)^2$ $\qquad f)\ \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}-x\right)^2-\left(\frac{1}{2}+x\right)^2\right]=\frac{2x-5}{7}-\frac{2}{3}x$

$g)\ \frac{x-1}{3}+2=\frac{x-5}{2}$ $\qquad h)\ \frac{1}{9}(3-2x)-\frac{1}{4}(x-1)=x+5$

$i)\ (x^2+x-2)^2-(x^2-1)^2=(x^2-1)^2(2x+3)$ $\qquad l)\ (2x+3)(3x-6)=3x(2x-1)$

$\left[a)\ S=\left\{\frac{5}{7}\right\};b)\ S=\left\{\frac{1}{7}\right\};c)\ S=\emptyset;d)\ \ S=\{1\};e)\ S=\{2\}\ ;f)\ S=\left\{\frac{5}{7}\right\};g)\ \ S=\{25\};h)\ \ S=\{-3\};i)\ S=\mathbb{R};l)\ \ S=\emptyset\right]$

Esercizio 10.
Trova il valore del parametro k in modo che l'equazione $2x+1=kx-3$ abbia come soluzione

a) $S=\{2\}$ b) $S=\emptyset$

Esercizio 11.
Risolvi le seguenti equazioni di grado superiore al primo

$a)\ 4x^2-4x+1=0$ $\qquad b)\ x^2=2x-1$

$c)\ x^2+4=0$ $\qquad d)\ x^3-x^2-12x=0$

$e)\ x^3-6x^2+12x=8$ $\qquad f)\ (4x^2-9)(x+1)(4x^2+9)=0$

$g)\ 5x^3 + x^2 - 5x - 3 = 0 \qquad h)\ x^3 + x^2 = 5x - 3$

$\left[a)\ S = \left\{\frac{1}{2}\right\}; b)\ S = \{1\}; c)\ S = \emptyset; d)\ \ S = \{-3,0,4\}; e)\ S = \{2\}\ ; f)\ S = \left\{\pm\frac{3}{2}, -1\right\}; g)\ S = \left\{-\frac{3}{5}, \pm 1\right\}; h)\ S = \{1, -3\}\ \right]$

Esercizio 12.

Risolvi le seguenti equazioni fratte

$a)\ \frac{2}{x} = \frac{1}{x-1}$ $\qquad b)\ \frac{x+3}{x+3} = 1$

$c)\ \frac{x+1}{x-1} + \frac{2x}{1-x} = 2$ $\qquad d)\ \frac{x+3}{x+3} = 0$

$e)\ \frac{x+3}{2x-2} - \frac{11}{2} = \frac{x+1}{1-x}$ $\qquad f)\ \frac{x}{x+1} = \frac{2x-1}{x} - 1$

$g)\ \frac{6x+3}{(x-2)^2} + \frac{20x-32}{4x} = 6 + \frac{1-x^2}{x^2-2x}$ $\qquad h)\ \frac{5}{4x-3} - \frac{5x+1}{8x^2-6x} - \frac{6x}{16x^2-9} = \frac{2x+1}{8x^2+6x}$

$i)\ \frac{2x-1}{x-1} + \frac{1}{6} = \frac{x(x-7)}{6x^2-18x+12} - \frac{2x-3}{2-x}$ $\qquad j)\ \frac{x-5}{x-1} + \frac{x-1}{5-x} = \frac{x-21}{x^2-6x+5}$

$k)\ \frac{x^2}{x^2-x} + \frac{1}{1-x} = 1$ $\qquad l)\ \frac{5}{3x-9} - \frac{2}{3x} = \frac{x+2}{x} + \frac{x+2}{3-x}$

$m)\ \frac{4}{3x^2-3} + 2\left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(2 - \frac{1}{x-1}\right)$ $\qquad n)\ \frac{1}{2x^2-2x} - \frac{3}{3x-2x^2} = \frac{1}{2x^2-5x+3}$

$o)\ \left(\frac{x}{12} - \frac{12}{x}\right) : \left(1 + \frac{12}{x}\right) = \frac{x-12}{12}$ $\qquad p)\ \frac{3x-1}{x^2-6x+8} - \frac{4}{x-4} = \frac{5}{4-2x}$

$q)\ \frac{1-3x}{x-\frac{1}{2}} + \frac{6x+3}{x-3} - \frac{31x-8}{2x^2-7x+3} = 3$ $\qquad r)\ \frac{2x+4}{x^2-4x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{4-x} = 0$

$s)\ \frac{9x^2+x+3}{(x+3)^2} + \frac{6x+4}{3x+2} = \frac{5x-38}{x+3} + 6$ $\qquad t)\ \frac{2-\frac{x+6}{x+8}}{2-\frac{x+4}{x+8}} = \frac{1}{2}$

$u)\ \frac{2x}{4x^2-12x+9} + \frac{1}{4x^2-9} = \frac{1}{2x+3}$ $\qquad v)\ \frac{x}{x^3-2x^2+x-2} - \frac{2}{x^3+x^2+x+1} = \frac{1}{x^2-x-2}$

$[a)\ S = \{2\}; b)\ S = \mathbb{R} - \{-3\}; c)\ S = \emptyset; d)\ \ S = \emptyset; e)\ S = \{2\}\ ; f)\ \ S = \emptyset; g)\ S = \{1\}; h)\ S = \emptyset;\ i)\ S = \emptyset;\ j)\ S = \emptyset;$
$k)\ S = \mathbb{R} - \{0,1\};\ i)\ S = \emptyset; l)\ S = \{-2\};\ m)\ S = \{3\}; n)\ S = \emptyset; o)\ S = \mathbb{R} - \{-12,0\}; p)\ S = \emptyset; q)\ S = \{1\}; r)\ S = \emptyset$
$s)\ S = \emptyset; t)\ S = \emptyset; u)\ S = \left\{\frac{3}{5}\right\}; v)\ S = \{3\}\right]$

Esercizio 13.

Risolvi le seguenti equazioni parametriche intere

$a)\ (a-3)x = 1 \qquad b)\ (a-3)x = a-3$

$c)\ (a-3)x = a \qquad d)\ (a-1)(a-2)x = (2a-1)(a-1)$

$e)\ ax + 1 - a = 0 \qquad f)\ 3x - a = a(x-3) + 6$

$$g)\ a^2x-4x-a=0 \qquad h)\ (a-1)(x-3)=0$$

$\Big[a)$ $se\ a=3, S=\emptyset; se\ a\neq 3, S=\left\{\frac{1}{a-3}\right\}$ $b)$ $se\ a=3, S=\mathbb{R}; se\ a\neq 3, S=\{1\}$
$c)$ $se\ a=3, S=\emptyset; se\ a\neq 3, S=\left\{\frac{a}{a-3}\right\}$ $d)$ $se\ a=1, S=\emptyset; se\ a=2, S=\emptyset; se\ a\neq 1 \wedge a\neq 2, S=\left\{\frac{2a-1}{a-2}\right\}$
$e)$ $se\ a=0, S=\emptyset; se\ a\neq 0, S=\left\{\frac{a-1}{a}\right\}$ $f)$ $se\ a=3, S=\mathbb{R}; se\ a\neq 3, S=\{2\}$
$g)$ $se\ a=\pm 2, S=\emptyset; se\ a\neq \pm 2, S=\left\{\frac{a}{a^2-4}\right\}$ $h)$ $se\ a=1, S=\mathbb{R}; se\ a\neq 1, S=\{3\}\Big]$

Esercizio 14.
Risolvi le seguenti equazioni parametriche intere, con il parametro al denominatore

$$a)\ \frac{x}{a-1}=\frac{1}{a-2}-\frac{x}{a^2+a-2} \qquad b)\ \frac{3x+a}{a^2-4}+\frac{6x}{a-2}=\frac{5x}{a+2}$$

$$c)\ \frac{2a-x}{a}+3=2x \qquad d)\ \frac{3}{a}+x=2$$

$$e)\ \frac{x}{a+1}+\frac{x-1}{a-1}=1 \qquad f)\ \frac{x}{a^2-a}-\frac{x}{a^2+a}=\frac{2}{a^2-1}$$

$$g)\ \frac{x}{a-1}+\frac{2x-1}{1-a^2}=\frac{x}{a+1} \qquad h)\ \frac{2x-a}{a}-\frac{x+a}{3a}=1-\frac{x}{2}$$

$\Big[a)$ $se\ a=1 \vee a=\pm 2\ priva\ di\ senso; se\ a=-3, S=\emptyset; se\ a\neq 1 \wedge a\neq \pm 2 \wedge a\neq -3, S=\left\{\frac{(a-1)(a+2)}{(a+3)(a-2)}\right\}$
$b)$ $se\ a=\pm 2\ priva\ di\ senso; se\ a=-25, S=\emptyset; se\ a\neq \pm 2 \wedge a\neq -25, S=\left\{-\frac{a}{a+25}\right\}$
$c)$ $se\ a=0, priva\ di\ senso; se\ a=-\frac{1}{2}, S=\emptyset; se\ a\neq 0 \wedge a\neq -\frac{1}{2}, S=\left\{\frac{5a}{2a+1}\right\}$
$d)$ $se\ a=0, priva\ di\ senso; se\ a\neq 0, S=\left\{\frac{2a-3}{a}\right\}$
$e)$ $se\ a=\pm 1, priva\ di\ senso; se\ a=0, S=\mathbb{R}; se\ a\neq \pm 1 \wedge a\neq 0, S=\left\{\frac{a+1}{2}\right\}$
$f)$ $se\ a=0 \vee a=\pm 1, priva\ di\ senso; se\ a\neq 0 \wedge a\neq \pm 1, S=\{a\}$
$g)$ $se\ a=\pm 1, priva\ di\ senso; se\ a\neq \pm 1, S=\emptyset$
$h)$ $se\ a=0, priva\ di\ senso; se\ a=-\frac{10}{3}, S=\emptyset; se\ a\neq 0 \wedge a\neq -\frac{10}{3}, S=\left\{\frac{14a}{3a+10}\right\}\Big]$

Esercizio 15.
Risolvi le seguenti equazioni parametriche fratte

$$a)\ \frac{1}{x-a}=1 \qquad b)\ \frac{x+a}{x-1}+\frac{a}{3x-3}=2$$

$$c)\ \frac{x+2a}{x-2a}-\frac{x-2a}{x+2a}=\frac{4x(2a-1)+3}{x^2-4a^2} \qquad d)\ \frac{a}{2x-1}+\frac{a-1}{x+4}=0$$

$$e)\ \frac{1}{x-a}+\frac{1}{a-1}=\frac{a}{ax-x-a^2+a} \qquad f)\ \frac{ax-2}{x-3}=\frac{a^2-1}{a-2}-\frac{a}{x-3}$$

$$g)\ 1-\frac{x}{a^2+x}=\frac{a^2}{a^2+x} \qquad h)\ \frac{x}{x+a}-\frac{1}{x-a}=1$$

$\Big[a)\ S=\{1+a\} \qquad b)\ se\ a=-\frac{3}{4}, S=\emptyset; se\ a\neq-\frac{3}{4}, S=\left\{\frac{4a+6}{3}\right\}$

$c) se\ a=\pm\frac{3}{8}\ , S=\emptyset; se\ a\neq\pm\frac{3}{8}, S=\left\{\frac{3}{4}\right\}$

$d)\ se\ a=0\vee a=\frac{2}{3}\vee a=1, S=\emptyset; se\ a\neq 0\vee a\neq\frac{2}{3}\vee a\neq 1, S=\left\{\frac{3a+1}{2-3a}\right\}$

$e)\ se\ a=1, priva\ di\ senso; se\ a\neq 1, S=\{a+1\}$

$f)\ se\ a=2, priva\ di\ senso; se\ a=\frac{1}{2}, S=\mathbb{R}-\{3\}; se\ a\neq\frac{1}{2}\wedge a\neq 2, S=\{2a-1\}$

$g)\ S=\mathbb{R}-\{-a^2\} \qquad h)\ se\ a=-1\vee a=0, S=\emptyset; se\ a\neq -1\wedge a\neq 0, S=\left\{\frac{a(a-1)}{a+1}\right\}\Big]$

Le disequazioni di primo grado

2.7 Disuguaglianze

Definizione.

Siano a e b due numeri reali distinti tra loro.

Allora

- se a è minore di b scriveremo $a<b$
- se a è maggiore di b scriveremo $a>b$

Introduciamo altre due relazioni d'ordine: la scrittura

$$a\leq b$$

si legge "a minore o uguale a b" e la consideriamo vera se a è minore di b *oppure* se $a=b$.

In modo simile

$$a\geq b$$

si legge "a maggiore o uguale a b" ed è vera se a è maggiore di b *oppure* se $a = b$.

Vediamo alcuni esempi.

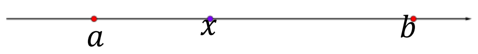
$2 < 3$ V	$2 > 6$ F	$3 \leq 8$ V	$4 \geq 7$ F
$2 < 2$ F	$4 > 4$ F	$3 \leq 3$ V	$4 \geq 4$ V
$5 < 1$ F	$7 > 1$ V	$9 \leq 2$ F	$5 \geq 1$ V

Esercizio.
Stabilisci se le seguenti disuguaglianze sono vere (V) o false (F).

$5 < 3$	$23 > 6$	$13 \leq 8$	$6 \geq 6$
$6 < 6$	$7 > 7$	$3 \leq 7$	$4 \geq 8$
$5 < 7$	$7 > 9$	$9 \leq 9$	$6 \geq 5$

2.8 Intervalli di $\mathbb{R}$

Prendiamo due numeri reali a e b, con $a < b$.
Indichiamo inoltre con x un numero compreso tra loro.



I numeri a, x e b sono rappresentati sulla retta *orientata* dei numeri e sono disposti in ordine crescente.

Affinchè x sia compresa tra a e b deve accadere che $x > a$ e, al contempo, $x < b$: queste condizioni sono espresse dalla scrittura $a < x < b$.

Se desideriamo che x possa assumere anche i valori estremi a e b scriveremo $a \leq x \leq b$.

Per indicare che x è un valore compreso tra a e b e che possa assumere il valore a ma non b useremo la scrittura $a \leq x < b$; viceversa, se desideriamo escludere a e includere b scriveremo $a < x \leq b$.

Esempio.
Se x è un numero

- strettamente compreso tra 1 e 2 allora $1 < x < 2$
- compreso tra 1 e 2, e desideriamo che possa valere 1 e 2 allora $1 \leq x \leq 2$
- compreso tra 1 e 2 che può valere 1 ma non 2 allora $1 \leq x < 2$
- compreso tra 1 e 2, che può valere 2 ma non 1 allora $1 < x \leq 2$.

Nel seguito del capitolo useremo insiemi numerici speciali, chiamati *intervalli:* intuitivamente un insieme di numeri è un intervallo se "non ha buchi", ovvero se include tutti i numeri compresi fra due suoi elementi arbitrari. Più formalmente, diamo la seguente

Definizione.
Sia I un insieme di numeri reali.
Diciamo che I è un intervallo se per ogni $x, y \in I$ con $x < y$ e z è un numero tale che $x < z < y$ allora $z \in I$.

Esempio.
a) L'insieme $\mathbb{N}$ *non è un intervallo.* Se infatti prendiamo due numeri naturali, ad esempio 1 e 2, i numeri compresi non sono numeri naturali.

b) L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R}: x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}: x > 3\}$ *non è un intervallo.* Se prendiamo ad esempio i numeri -1 e 4 che appartengono ad A, non è vero che tutti i numeri compresi fra loro sono elementi dell'insieme (ad esempio $2 \notin A$).

c) L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R}: 1 < x \leq 3\}$ è un intervallo.

d) L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$ è un intervallo.

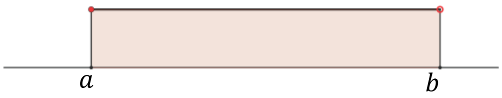
Disponiamo di una notazione particolare per rappresentare gli insiemi che sono intervalli.

Se a e b sono due numeri reali con $a < b$, allora

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$$

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$$



$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$$

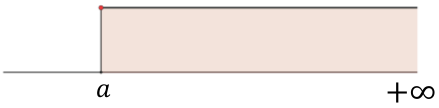
In questo modo possiamo descrivere gli intervalli *limitati,* cioè l'insieme dei numeri compresi fra due numeri dati.

Per rappresentare gli intervalli *illimitati* (ovvero i numeri da un certo punto *in poi,* o i numeri *fino* a un certo punto) dobbiamo introdurre due simboli: $+\infty$ (più infinito) e $-\infty$ (meno infinito).

Possiamo pensare a $+\infty$ come al più grande fra tutti i numeri e a $-\infty$ come al numero più piccolo: in questo modo, in termini intuitivi, possiamo collocare sulla retta dei numeri "all'estrema destra" il $+\infty$ e "all'estrema sinistra" il $-\infty$.

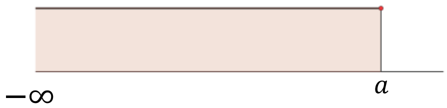
Questi simboli *non sono numeri* e hanno il solo scopo di rappresentare in modo comodo gli intervalli illimitati: poniamo infatti

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$$



$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}: x > a\}$$

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}: x \leq a\}$$



$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R}: x < a\}$$

Osservazione.
Gli insiemi rappresentati dalle parentesi graffe non si devono confondere con quelli indicati con le parentesi quadre: ad esempio l'insieme $\{0,1\}$ ha *due elementi,* il numero 0 e 1, mentre $[0,1]$ ha come elementi tutti i numeri tra 0 e 1, compresi 0 e 1.

Esercizio.
Determina gli insiemi seguenti

1) $[1,3] \cap]2,5]$	2) $[1,3] \cup]2,5]$	3) $[0,1] \cup [1,3]$	4) $[0,1] \cap [1, +\infty[$
5) $]-\infty, 4] \cap [5, +\infty[$	6) $]-\infty, 4] \cap [3, +\infty[$	7) $]-\infty, 4] \cup [3, +\infty[$	8) $[0,1] \cap \{0,1\}$
9) $[0, +\infty[- \{1\}$	10) $\mathbb{R} - \{0\}$	11) $\mathbb{R} - [0,1]$	12) $]-\infty, 1] - \{0,1\}$

Soluzioni.

1) $]2,3]$ 2) $[1,5]$ 3) $[0,3]$ 4) $[0, +\infty[$ 5) $\emptyset$ 6) $[3,4]$
7) $\mathbb{R}$ 8) $\{0,1\}$ 9) $[0,1[\cup]1, +\infty[$ 10) $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ 11) $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ 12) $]-\infty, 0[\cup]0,1[$

2.9 Disequazioni: generalità

Definizione.
Chiamiamo *disequazione razionale intera* una disuguaglianza fra due polinomi.
Chiamiamo *disequazione razionale fratta* una disuguaglianza fra due frazioni algebriche.

L'espressione che si trova a sinistra del simbolo di disuguaglianza si chiama *primo membro* e l'espressione a destra *secondo membro*.

Le lettere che compaiono nella disequazione si chiamano incognite.

Nel seguito tratteremo disequazioni con una sola incognita, che usualmente indicheremo con x.

Il grado di un'equazione intera è l'esponente maggiore in cui compare l'incognita, dopo aver svolto gli eventuali calcoli al primo e al secondo membro.

Esempio.

- $2x - 1 > 0$ è una disequazione intera di primo grado
- $x - 1 \leq x^2 + 3x - 2$ è una disequazione intera di secondo grado
- $\frac{x-1}{x+5} < 0$ è una disequazione fratta
- $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{x^2}$ è una disequazione fratta

Definizione.
Diciamo che un numero è *una soluzione* di una disequazione se

1. può essere sostituito al posto della incognita

   Questo significa che, una volta sostituto il numero al posto della incognita si ottiene una espressione *che ha significato,* a prescindere che sia vera o falsa.
2. rende vera la disuguaglianza

L'insieme dei numeri che sono soluzione viene detto semplicemente *soluzione della disequazione* e lo indicheremo con S.

Esempio.
Consideriamo la seguente disequazione

$$\frac{x-1}{5-x} > 0$$

- il numero 5 non è una soluzione perché non soddisfa la prima condizione: infatti, sostituendolo al posto della incognita otteniamo

  $$\frac{5-1}{5-5} > 0$$

  che non ha significato perché il primo membro è una frazione con denominatore nullo.
- il numero 7 non è soluzione, perché soddisfa la prima condizione ma non la seconda: sostituendolo al posto della incognita otteniamo infatti la disuguaglianza

  $$\frac{7-1}{5-7} > 0$$

  che ha significato, ma è falsa.
- il numero 4 è soluzione: infatti, sostituendo

$$\frac{4-1}{5-4} > 0$$

che ha significato ed è una disuguaglianza vera.

In generale una disequazione può avere infinite soluzioni, nessuna soluzione, avere per soluzione ogni numero reale o avere un numero finito di soluzioni: vediamo qualche esempio.

Esempio 1.
L'equazione

$$x - 1 > 0$$

ha per soluzione tutti i numeri che, se sottratti ad uno, danno un numero positivo: questi sono esattamente i numeri maggiori di 1.

In questo caso scriveremo $S =]1, +\infty[$ o, equivalentemente $S: x > 1$.

Esempio 2.
L'equazione

$$x^2 > 0$$

ha per soluzione tutti i numeri che hanno il quadrato positivo. Ricordiamo – ed è un fatto molto importante – che non tutti i numeri moltiplicati per loro stessi sono positivi: lo zero fa eccezione, infatti $0^2 = 0 \ngtr 0$.

La disequazione è pertanto verificata per tutti i numeri *non nulli, q*uindi la soluzione della disequazione è $S = \mathbb{R} - \{0\}$.

Si può scrivere anche $S =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ o $S: x \neq 0$.

Esempio 3.
L'equazione

$$x^2 \geq 0$$

ha per soluzione ogni numero reale, dunque $S = \mathbb{R}$; scriveremo anche $S: \forall x \in \mathbb{R}$.

Esempio 4.
L'equazione

$$(x-1)^2 < 0$$

non è verificata per alcun valore che possiamo attribuire ad x, perché un quadrato non è mi negativo: quindi S= $\emptyset$ o anche $S: \nexists x \in \mathbb{R}$.

Esempio 5.
Consideriamo l'equazione

$$(x-1)^2 \leq 0$$

Sappiamo che un quadrato non può essere negativo, dunque la disequazione è vera solo se $(x-1)^2 = 0$ e questo avviene se $x = 1$.

Quindi $S = \{1\}$ o, in modo equivalente, $S: x = 1$.

Definizione.

Due disequazioni si dicono *equivalenti* se hanno la stessa soluzione (ovvero lo stesso insieme delle soluzioni, cioè se sono verificate per gli stessi valori della incognita).

Esempio 1.
Le disequazioni

$$x - 1 \geq 7$$

$$x - 3 \geq 5$$

sono equivalenti perché sono entrambe verificate per tutti e soli i valori di x maggiori o uguali a 8, ovvero per la soluzione di entrambe le disequazioni è l'insieme $S = [8, +\infty[$.

Esempio 2.
Le disequazioni

$$2x > 6$$

$$-2x < -6$$

sono equivalenti perché sono entrambe verificate per i valori di x maggiori di 3; la soluzione delle disequazioni è l'insieme $S =]3, +\infty[$.

Esiste un principio di equivalenza per le disequazioni analogo a quello che abbiamo visto per le equazioni (ma, come vedremo, con una differenza estremamente significativa).

Prima di enunciarlo, vediamo qualche esempio numerico.

Consideriamo i numeri 6 e 8, legati tra loro dalla disuguaglianza

$$6 < 8$$

Operiamo ora su 6 e 8, effettuando su di loro la stessa operazione e vediamo i risultati in quale ordine stanno fra loro: ad esempio

$$6 < 8$$

$$6 < 8 \xrightarrow{+5} 11 < 13 \qquad 6 < 8 \xrightarrow{-3} 3 < 5 \qquad 6 < 8 \xrightarrow{\cdot 4} 24 < 32 \qquad 6 < 8 \xrightarrow{:2} 3 < 4$$

In questo caso – come nel caso dell'uguaglianza – la relazione d'ordine si conserva.

Ma le cose non stanno sempre così: vediamo cosa accade se moltiplichiamo o dividiamo per un numero negativo

$$6 < 8$$

$$6 < 8 \xrightarrow{\cdot(-1)} -6 > -8 \qquad 6 < 8 \xrightarrow{:(-1)} -6 > -8 \qquad 6 < 8 \xrightarrow{\cdot(-4)} -24 > -32 \qquad 6 < 8 \xrightarrow{:(-2)} -3 > -4$$

Osserviamo che, in questo caso, la relazione di ordine *la relazione di ordine si inverte.*

Naturalmente questi risultati non dipendono dai numeri particolari considerati.

Possiamo dire che se abbiamo due quantità che stanno fra loro in una certa relazione di ordine ($<, >, \leq, \geq$) allora

- se sommiamo o sottraiamo le due quantità per uno stesso numero, le quantità ottenute stanno nella stessa relazione d'ordine fra loro: la relazione di ordine si conserva
- se moltiplichiamo o dividiamo le due quantità per uno stesso numero *positivo,* la relazione di ordine si conserva
- se moltiplichiamo o dividiamo le due quantità per uno stesso numero *negativo,* la relazione di ordine *si inverte*

A questo punto, è ragionevole dare il seguente

Principio di equivalenza per le disequazioni

Data una disequazione, otteniamo una disequazione equivalente se

- sommiamo o sottraiamo i due membri della disequazione per un *qualunque* numero, conservando il verso della disuguaglianza
- moltiplichiamo o dividiamo i due membri della disequazione per un numero *positivo,* conservando l'ordine della disuguaglianza
- moltiplichiamo o dividiamo i due membri della disequazione per un numero *negativo,* *invertendo* l'ordine della disuguaglianza

Naturalmente i casi citati escludono la divisione e la moltiplicazione per zero: questo perché la divisione per zero non è un'operazione ammessa e perché la moltiplicazione per zero non fornisce, in generale, una disequazione equivalente (ad esempio, la disequazione $x > 1$ non è equivalente alla disequazione $0 \cdot x > 1 \cdot 0 \dots$).

Esempio.
a) Data la disequazione

$$-x < 1$$

moltiplicando per (-1) i due membri otteniamo la disequazione equivalente

$$x > -1$$

La soluzione delle disequazioni è $S =]-1, -\infty[$.

b) Dalla disequazione

$$x - 2 \geq 4$$

sommando $(+2)$ ai due membri otteniamo la disequazione equivalente

$$x \geq 6$$

Le disequazioni hanno per soluzione $S = [6, +\infty[$.

c) Data la disequazione

$$\frac{x}{2} \leq 0$$

moltiplicando per 2 i due membri otteniamo la disequazione equivalente

$$x \leq 0$$

con soluzione $S =]-\infty, 0]$.

Il principio di equivalenza giustifica alcune importanti proprietà, che utilizzeremo in seguito per trovare la soluzione delle disequazioni

Prima proprietà.
Vale per le disequazioni una proprietà analoga a quella vista per le equazioni: data una disequazione, si ottiene una disequazione equivalente "trasportando" gli addendi da un membro all'altro cambiandoli di segno e lasciando inalterata la relazione d'ordine.

Consideriamo a titolo di esempio la disuguaglianza

$$A + \Delta < B$$

dove A, B e Δ sono numeri o espressioni contenenti x.

Se sottraiamo ai due membri Δ, otteniamo la disequazione equivalente

$$A + \Delta - \Delta < B - \Delta$$

sappiamo che addizionando e sottraendo il verso della disuguaglianza si conserva

ovvero

$$A < B - \Delta$$

Riassumendo: partendo da

$$A + \Delta < B$$

abbiamo ottenuto la disequazione equivalente

$$A < B - \Delta$$

Seconda proprietà.
Se una disequazione contiene lo stesso monomio al primo e al secondo membro, possiamo ottenere una disequazione equivalente sopprimendo il monomio.

Consideriamo per fissare le idee la disequazione

$$A + \Delta < B + \Delta$$

dove Δ è una qualunque espressione numerica o letterale.

Sottraendo Δ ai due membri otteniamo la disequazione equivalente

$$A + \Delta - \Delta < B + \Delta - \Delta$$

ovvero

$$A < B$$

In definitiva, da

$$A + \Delta < B + \Delta$$

abbiamo ottenuto la disequazione equivalente

$$A < B$$

2.10 Disequazioni lineari

Definizione.
Chiamiamo *disequazione lineare* una disequazione razionale intera di primo grado.

Sono disequazioni lineari, ad esempio

- $x > 0$
- $2x - 1 \leq x + \frac{1}{3}$
- $\frac{x+3}{2} \geq 1$

Le disequazioni lineari sono disequazioni nella forma

$$P(x) \gtreqless Q(x)$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi di primo grado (o di grado zero, ovvero termini noti) nella incognita x.

Definizione.
Diciamo che una disequazione lineare è in *forma canonica* o in *forma normale* se è del tipo

$$ax \gtreqless b$$

dove a e b sono arbitrari numeri reali.

Applicando il principio di eqivalenza è facile trovare l'insieme delle soluzioni di una disequazione lineare in forma normale: vediamo alcuni esempi.

Esempi.
a) Risolviamo la disequazione in forma normale

$$2x < 8$$

Dividiamo per 2 i due membri: otteniamo la disequazione equivalente

$$x < 4$$

il verso della disequazione non cambia perché abbiamo diviso per un numero *positivo*

Pertanto la soluzione è $S =]-\infty, 4[$ o, in modo equivalente $S: x < 4$.

b) Risolviamo la disequazione

$$-\frac{x}{2} \geq 3$$

Possiamo anzitutto cambiare di segno al primo membro: questo è possibile moltiplicando per (-1) i due membri; in questo caso occorre cambiare il verso della disuguaglianza.

Otteniamo così la disequazione equivalente

$$\frac{x}{2} \leq -3$$

Moltiplicando i due membri per 2 otteniamo quindi

$$x \leq -6$$

potevamo ottenere la stessa disequazione moltiplicando direttamente per -2

Abbiamo ottenuto quest'ultima disequazione con operazioni che non cambiano l'insieme delle soluzioni: la soluzione della disequazione di partenza è pertanto $S =]-\infty, -6]$.

c) Risolviamo

$$0 \cdot x < 0$$

Ovviamente non possiamo dividere per zero (non è un'operazione lecita): da un esame diretto è facile vedere che *nessun numero* sostituito al posto di x rende vera la disuguaglianza, quindi $S = \emptyset$ (o, equivalentemente, $S\colon \nexists x \in \mathbb{R}$).

d) Risolviamo

$$0 \cdot x \leq 0$$

In questo caso *ogni numero* sostituito al posto di x rende vera la disuguaglianza, perché qualunque sostituzione restituisce $0 \leq 0$, che consideriamo vera, quindi $S = \mathbb{R}$.

e) Risolviamo

$$0 \cdot x > 0$$

Nessun numero sostituito al posto di x rende vera la disuguaglianza, quindi $S = \emptyset$.

f) Risolviamo

$$0 \cdot x \geq 0$$

Ogni numero sostituito al posto di x rende vera la disuguaglianza, quindi $S = \mathbb{R}$.

g) Risolviamo

$$0 \cdot x \geq -3$$

Ogni numero sostituito al posto di x rende vera la disuguaglianza, quindi $S = \mathbb{R}$.
h) Risolviamo

$$0 \cdot x \geq 1$$

Nessun numero sostituito al posto di x rende vera la disuguaglianza, quindi $S = \emptyset$.
i) Risolviamo

$$0 \cdot x < 3$$

Ogni numero sostituito al posto di x rende vera la disuguaglianza, quindi $S = \mathbb{R}$.
l) Risolviamo

$$0 \cdot x \leq -1$$

Nessun numero sostituito al posto di x rende vera la disuguaglianza, quindi $S = \emptyset$.

Possiamo riassumere le considerazioni precedenti.

Risoluzione di una disequazione in forma normale

$$\boxed{ax \gtreqless b}$$

se $a \neq 0$

Dividiamo per a, conservando o invertendo il verso della disuguaglianza a seconda che a sia positivo o negativo.

Otteniamo così la disequazione equivalente

$$x \gtreqless N, N \in \mathbb{R}$$

che ci fornisce direttamente la soluzione della disequazione.

se $a = 0$

Otteniamo la disequazione

$$0 \cdot x \gtreqless b$$

la cui soluzione dipende dal segno di b e dal verso della disuguaglianza.

Esercizi.
Trova la soluzione delle seguenti disequazioni lineari in forma normale.

1) $-x < 0$	2) $-3x \geq 0$	3) $-\frac{1}{5}x \leq 0$	4) $\frac{x}{-2} < 0$
5) $0 \cdot x \leq 1$	6) $0 \cdot x < 1$	7) $0 \cdot x > 1$	8) $0 \cdot x \geq 1$
9) $0 \cdot x \leq -1$	10) $0 \cdot x < -1$	11) $0 \cdot x > -1$	12) $0 \cdot x \geq -1$
13) $5x > 0$	14) $5x \leq 10$	15) $-5x \leq 0$	16) $-\frac{2}{3}x > 6$
17) 15) $-\frac{2}{3}x > -6$	18) $\frac{1}{3}x > \frac{1}{3}$	19) $-\frac{1}{3}x > \frac{1}{3}$	20) $-\frac{1}{3}x > -\frac{1}{3}$

Soluzioni.
1) $S =]0, +\infty[$ 2) $S =]-\infty, 0]$ 3) $S = [0, +\infty[$ 4) $S =]0, +\infty[$ 5) $S = \mathbb{R}$ 6) $S = \mathbb{R}$ 7) $S = \emptyset$ 8) $S = \emptyset$

9) $S = \emptyset$ 10) $S = \emptyset$ 11) $S = \mathbb{R}$ 12) $S = \mathbb{R}$ 13) $S =]0, +\infty[$ 14) $S =]-\infty, 2]$ 15) $S = [0, +\infty[$

16) $S =]-\infty, -9[$ 17) $S =]-\infty, 9[$ 18) $S =]1, +\infty[$ 19) $S =]-\infty, -1[$ 20) $S =]-\infty, 1[$

Vale la seguente, importante

Proposizione.
Data una disequazione lineare, è sempre possibile ottenere una disequazione in forma canonica ad essa equivalente.

Per ottenere una equazione in forma canonica equivalente ad una disequazione data, dopo aver svolto eventualmente i calcoli al primo e al secondo membro, è sufficiente infatti trasportare i termini con l'incognita al primo membro e i termini noti al secondo membro (ottenendo poi un monomio in x al primo membro e un termine noto al secondo).

Abbiamo ora a disposizione una strategia che ci consente di trovare la soluzione di una disequazione lineare.

Risoluzione delle disequazioni lineari
Schema risolutivo

1. Troviamo la disequazione in forma canonica equivalente, ovvero
   - sviluppiamo gli eventuali calcoli al primo e al secondo membro
   - trasportiamo i termini con l'incognita al primo membro e i termini noti al secondo
   - svolgiamo i calcoli al primo e al secondo membro
2. Risolviamo l'equazione in forma canonica ottenuta $ax \gtreqless b$
   - se $a \neq 0$ dividiamo i due membri per a (se $a > 0$ il verso si conserva, altrimenti si inverte)
   - se $a = 0$ la disequazione diventa $0 \cdot x \gtreqless b$ e si ottiene direttamente la soluzione, che dipende dal verso della disuguaglianza e dal segno di b

Se la disequazione contiene denominatori numerici, conviene in genere esprimere i due membri come frazioni con lo stesso denominatore (dato dal mcm dei denominatori). I denominatori possono poi essere eliminati moltiplicando per il denominatore comune (il verso della disuguaglianza non cambia se moltiplichiamo per un numero positivo).
Vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.
Troviamo la soluzione della disequazione

$$2(3x-1)+(x+1)(x-1) > 4(2x+3)+(x+2)^2-1$$

Troviamo l'equazione equivalente in forma normale e otteniamo

$$-6x > 18$$

da cui, dividendo per -6 i due membri e invertendo il verso della disuguaglianza

$$x < 6$$

La soluzione della disequazione è quindi $S =]-\infty, 6[$ o, il che è lo stesso $S: x < 6$.

Esempio 2.
Risolviamo la disequazione lineare

$$(2x-1)^2 > 4(x-3)(x+3)-4x$$

Svolgendo i calcoli otteniamo

$$0 \cdot x > -37$$

che è l'equazione equivalente in forma canonica.
La disequazione è verificata per ogni valore che attribuiamo ad x, pertanto la soluzione della disequazione è $S = \mathbb{R}$.

Osservazione.
Nell'esempio precedente abbiamo ottenuto la disequazione $0 \cdot x > -37$; essa è equivalente, per ogni valore di x, alla disuguaglianza numerica $0 > -37$ il cui valore di verità *non dipende dal valore di* x.
Ogni qualvolta dobbiamo risolvere una disequazione in forma canonica del tipo $0 \cdot x \lesseqgtr b$, possiamo ricondurci alla disequazione numerica equivalente $0 \lesseqgtr b$ e stabilire se è vera o falsa (e lo sarà indipendentemente dai valori di x).

Ad esempio

- $0 \cdot x > -1$ è equivalente a $0 > -1$, che è sempre vera: pertanto $S = \mathbb{R}$
- $0 \cdot x \leq 0$ è equivalente a $0 \geq 0$ che è sempre vera, dunque $S = \mathbb{R}$
- $0 \cdot x > 2$ è equivalente a $0 > 2$, che è sempre falsa, quindi $S = \emptyset$

Esempio 3.
Risolviamo la seguente disequazione lineare che contiene denominatori numerici

$$\frac{2+3x}{4} > \frac{x-2}{3} + 1$$

Esprimiamo i due membri in frazioni con lo stesso denominatore comune 12, dato dal *minimo comune multiplo fra* 4 *e* 3

$$\frac{3(2+3x)}{12} > \frac{4(x-2)+12}{12}$$

Possiamo ora passare a una disequazione equivalente moltiplicando i due membri per 12 (che, essendo un numero positivo, non fa cambiare il verso della disuguaglianza): otteniamo quindi

$$3(2+3x) > 4(x-2) + 12$$

Svolgiamo i calcoli e isoliamo i termini in x

$$x > -\frac{2}{5}$$

quindi la soluzione della disequazione è $S = \left]-\frac{2}{5}, +\infty\right[$.

Esercizi.
Trova la soluzione delle seguenti disequazioni lineari.

1) $2 - 3x > 0$	2) $5 - x < 0$
3) $(2x+1)^2 < 6 + (2x-1)^2 - 3(1-2x)$	4) $-3x + 3 + 2x > -5 - 3x$
5) $(3x+1)^2 - 4x(x-2) \leq 5x(x+6) - 16x$	6) $\frac{x}{3} < \frac{x}{2}$

7) $\frac{4}{5}x < \frac{2}{3}$

8) $\frac{x-3}{2} < 1$

9) $\frac{x-1}{6} - \frac{1}{12} > \frac{1}{2}x - 1$

10) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} > \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$

Soluzioni.

1) $S = \left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$ 2) $S =]5, +\infty[$ 3) $S = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[$ 4) $S =]-4, +\infty[$ 5) $S = \emptyset$

6) $S: x < 0$ 7) $S: x < \frac{5}{6}$ 8) $S: x < 5$ 9) $S = \emptyset$ 10) $S =]-\infty, 1[$

2.10. Segno di un polinomio di primo grado

Consideriamo, per fissare le idee, il polinomio lineare (ovvero di primo grado)

$$5 - x$$

Possiamo chiamare il polinomio P e, per indicare che contiene x, scrivere

$$P(x) = 5 - x$$

La lettera x rappresenta un qualunque numero reale: se le attribuiamo un certo valore, anche $P(x)$ sarà un numero, che dipende da x.

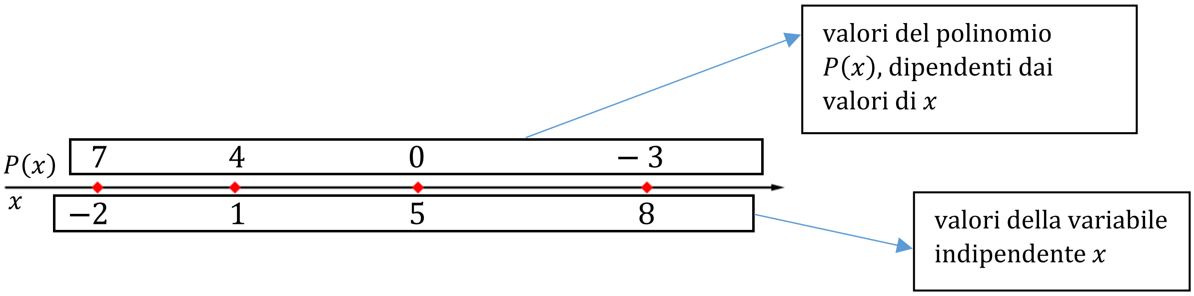
Ad esempio

- se $x = 1$ allora $P(1) = 5 - 1 = 4$
- se $x = 5$ allora $P(5) = 5 - 5 = 0$
- se $x = 8$ allora $P(8) = 5 - 8 = -3$
- se $x = -2$ allora $P(-2) = 5 - (-2) = 7$

e così via.

Visto che x assume valori arbitrari prende il nome di *variabile indipendente;* $P(x)$ è invece una *variabile dipendente,* perché i suoi valori dipendono dal numero assunto da x.

È possibile descrivere la dipendenza fra x e $P(x)$ anche per via grafica, utilizzando una retta orientata.



Sotto la retta orientata rappresentiamo i valori della variabile indipendente x e sopra ai valori di x i valori corrispondenti del polinomio $P(x)$.

Vedremo nel seguito che è molto importante conoscere il segno del polinomio: diamo la seguente

Definizione.
Studiare il segno di un polinomio $P(x)$ significa *trovare i valori di* x che rendono il polinomio positivo, negativo e nullo.

Per studiare il segno di $P(x)$ desideriamo trovare i valori di x che rendono $P(x)$ positivo.

In simboli

$$\boxed{x: P(x) > 0}$$

questa scrittura la possiamo interpretare come una *domanda*:

"quali sono i valori di x che rendono il polinomio $P(x)$ positivo"

Questo significa risolvere la disequazione

$$5 - x > 0$$

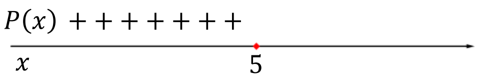
che è verificata se e solo se

$$\boxed{x < 5}$$

questa scrittura è la *risposta* alla domanda

Quindi il polinomio $P(x)$ è positivo se $x < 5$; in altri termini, se x è un qualunque numero minore di 5, i corrispondenti valori di $P(x)$ sono positivi.

Graficamente la situazione è descritta da



Ora, sapendo che il polinomio $P(x)$ è positivo se $x < 5$, possiamo dedurre che $P(x)$ è negativo se x si trova nell'intervallo complementare, ovvero se $x > 5$ (questa proprietà vale sempre, per tutti i polinomi, ma non per tutte le funzioni, come vedremo nel corso degli studi).
Quindi

$$\begin{array}{lccc} P(x) & \overbrace{+\,+\,+\,+\,+\,+\,+}^{P(x)\ positivo} & & \overbrace{-\,-\,-\,-\,-\,-\,-}^{P(x)\ negativo} \\ x & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{x<5} & 5 & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{x>5} \end{array}$$

Lo studio del segno non è ancora terminato: dobbiamo determinare il valore di x in corrispondenza del quale il polinomio si annulla.

Ma i polinomi di primo grado (anzi, tutti i polinomi) sono grandezze che variano con *continuità,* come ad esempio la temperatura: questo significa che se la temperatura in un certo momento è positiva e dopo un po' di tempo è sotto lo zero, deve esistere un istante in cui vale esattamente zero.

La stessa cosa avviene per i polinomi: in questo caso sappiamo che prima di 5 il polinomio è positivo e dopo 5 è negativo: questo ci consente di affermare che il polinomio vale zero esattamente se $x = 5$.

La rappresentazione grafica completa del segno del polinomio $P(x) = 5 - x$ è quindi

$$\begin{array}{lccc} P(x) & +\,+\,+\,+\,+\,+\,+ & 0 & -\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\ x & & 5 & \end{array}$$

Lo studio del segno per via analitica è pertanto

- $P(x) > 0 \Longrightarrow x < 5$
- $P(x) < 0 \Longrightarrow x > 5$
- $P(x) = 0 \Longrightarrow x = 5$

Riassumiamo i concetti chiave.

Segno di un polinomio lineare

Ricordiamo che studiare il segno di un polinomio $P(x)$ significa individuare i valori della variabile x in corrispondenza dei quali $P(x)$ sia positivo, negativo o nullo.

Per far questo è sufficiente scoprire quali sono i valori di x tali che $P(x)$ sia positivo: questo si traduce nell'impostare e risolvere la disequazione $P(x) > 0$.

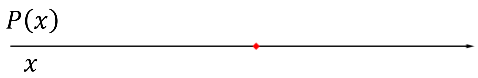
$$\boxed{x: P(x) > 0} \longrightarrow \boxed{Soluzione}$$

DOMANDA	RISPOSTA
“per quali valori di x il polinomio è positivo”	“i valori di x sono …”

A questo punto sappiamo anche, “gratuitamente”, dove il polinomio $P(x)$ è negativo: nell’intervallo aperto complementare alla soluzione (dove non è positivo, è negativo…).

Rimane da individuare il valore di x che rende nullo $P(x)$: esso è l’elemento separatore dell’intervallo di positività e l’intervallo di negatività di $P(x)$ (il polinomio, per passare da valori positivi a negativi, *per continuità* si deve annullare in un punto…).

A questo punto realizziamo una rappresentazione grafica



e descriviamo per via analitica il segno del polinomio

- $P(x) > 0 \Longrightarrow x$ …
- $P(x) < 0 \Longrightarrow x$ …
- $P(x) = 0 \Longrightarrow x$ …

Esercizi.
Studia il segno dei seguenti polinomi di primo grado

1) $P(x) = 2 - 3x$ 2) $P(x) = 5 + x$

3) $P(x) = -x - 1$ 4) $P(x) = 2x - 4$

Soluzioni.

1) $P(x) > 0 \Longrightarrow x < \frac{2}{3}$; $P(x) < 0 \Longrightarrow x > \frac{2}{3}$; $P(x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{2}{3}$

2) $P(x) > 0 \Longrightarrow x > -5$; $P(x) < 0 \Longrightarrow x < -5$; $P(x) = 0 \Longrightarrow x = -5$

3) $P(x) > 0 \Longrightarrow x < -1$; $P(x) < 0 \Longrightarrow x > -1$; $P(x) = 0 \Longrightarrow x = -1$

4) $P(x) > 0 \Longrightarrow x > 2$; $P(x) < 0 \Longrightarrow x < 2$; $P(x) = 0 \Longrightarrow x = 2$

2.11 Segno di un quadrato

Prima di trattare in modo completo lo studio del segno di un generico polinomio di grado superiore al primo, vediamo il comportamento di una classe particolare di polinomi di secondo grado: *i quadrati.*

Definizione.
Sia x un numero reale.
Si chiama *quadrato di* x il numero

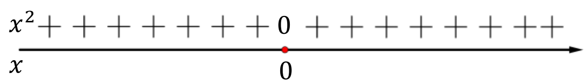
$$x^2 = x \cdot x$$

Un numero reale, in linea di principio, può essere positivo, negativo o *zero.*

Un quadrato ha un comportamento spaciale in merito al segno: più precisamente

- $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$
- $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Graficamente



Diversamente dai polinomi lineari, quindi, un quadrato *non è mai negativo:*

- è positivo se la base è diversa da zero
- è nullo se la base è zero

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.
Studiamo il segno del polinimio

$$(x-1)^2$$

Posto $P(x) = (x-1)^2$, per studiare il segno sappiamo che dobbiamo scoprire i valori di x che rendono il polinomio positivo: questo si traduce nel rispondere alla domanda

$$\boxed{x: P(x) > 0}$$

ovvero nel risolvere la disequazione

$$(x-1)^2 > 0$$

Sappiamo che un quadrato è positivo se la base è diversa da zero: in questo caso se

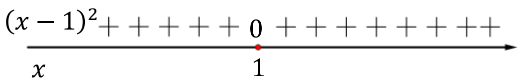
$$x - 1 \neq 0$$

ovvero

$$\boxed{x \neq 1}$$

Inoltre $(x-1)^2 = 0$ se $x = 1$.

L'andamento del segno del polinomio è



Quindi

- $(x-1)^2 > 0 \Longrightarrow x \neq 1$
- $(x-1)^2 = 0 \Longrightarrow x = 1$
- $(x-1)^2 < 0 \Longrightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$

Esempio 2.
Studiamo il segno di

$$P(x) = x^2 - 6x + 9$$

Osserviamo che $P(x)$ è lo sviluppo del quadrato di un binomio: in particolare $P(x) = (x-3)^2$.

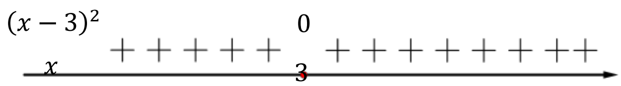
Siamo quindi in grado di studiarne il segno, procedendo come nell'esempio precedente.

$$\boxed{x: P(x) > 0} \Longrightarrow (x-3)^2 > 0 \Longrightarrow x - 3 \neq 0 \Longrightarrow \boxed{x \neq 3}$$

Ne viene che $(x-3)^2 = 0$ se $x = 3$.

Quindi

- $(x-3)^2 > 0 \Longrightarrow x \neq 3$
- $(x-3)^2 = 0 \Longrightarrow x = 3$
- $(x-3)^2 < 0 \Longrightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$



Esercizi.
Studia il segno dei seguenti polinomi di secondo grado riconducibili a quadrati di binomio (o al loro opposto).

1) $P(x) = x^2 - 4x + 4$ 2) $P(x) = 9x^2 + 6x + 1$

3) $P(x) = x^2 + x + \frac{1}{4}$ 4) $P(x) = -9x^2 + 12x - 4$

Soluzioni.
1) $P(x) > 0 \Longrightarrow\ x \neq 2\ ; P(x) = 0 \Longrightarrow x = 2\ ;\ P(x) < 0 \Longrightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$
2) $P(x) > 0 \Longrightarrow x \neq -\frac{1}{3}\ ; P(x) = 0 \Longrightarrow\ x = -\frac{1}{3};\ P(x) < 0 \Longrightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$
3) $P(x) > 0 \Longrightarrow\ x \neq -\frac{1}{2}\ ; P(x) = 0 \Longrightarrow\ x = -\frac{1}{2};\ P(x) < 0 \Longrightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$
4) $P(x) > 0 \Longrightarrow \nexists x \in \mathbb{R}\ ; P(x) < 0 \Longrightarrow x \neq \frac{2}{3}\ ;\ P(x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{2}{3}$

2.12 Segno di un polinomio di grado superiore al primo

Ricordiamo il seguente, fondamentale risultato.

Teorema.
Siano A e B due numeri reali.
Il segno di

$$A \cdot B$$

dipende dal segno di A e di B: in particolare

- $A \cdot B > 0 \Leftrightarrow A > 0 \wedge B > 0\ \mathit{oppure}\ A < 0 \wedge B < 0$ (ovvero se A e B sono *concordi*)
- $A \cdot B < 0 \Leftrightarrow A > 0 \wedge B < 0\ \mathit{oppure}\ A < 0 \wedge B > 0$ (ovvero se A e B sono *discordi*)
- $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \vee B = 0$

In altri termini, il prodotto fra due numeri è positivo se i numeri sono concordi, negativo se sono discordi ed è zero se almeno uno dei due fattori è zero.

Vedremo come questo risultato già noto dagli studi passati ci consenta di studiare il segno di polinomi di grado superiore al primo e di trovare la soluzione di equazioni non lineari.

Esempio 1.
Studiamo il segno dell'espressione

$$(x - 1) \cdot (3 - x)$$

Il segno di un prodotto, come abbiamo visto, dipende dal segno dei suoi fattori.

Poniamo dunque

$$I = x - 1 \qquad \text{primo fattore}$$

e

$$II = x - 3 \qquad \text{secondo fattore}$$

Ora studieremo il segno dei due fattori (ovvero troveremo i valori di x per cui i fattori sono positivi, negativi o nulli) e li confronteremo: i valori di x che rendono i fattori concordi restituiscono un prodotto positivo, se li rendono discordi otteniamo un prodotto negativo e se annullano uno dei due il prodotto è nullo.

Abbiamo visto che per studiare il segno di un polinomio di primo grado è sufficiente chiederci per quali valori di x il polinomio è positivo.

Dobbiamo quindi formulare le domande $\boxed{x: I > 0}$ e $\boxed{x: II > 0}$ e trovarne la soluzione (la risposta).

$$\boxed{x: I > 0} \Longrightarrow x - 1 > 0 \Longrightarrow \boxed{x > 1}$$

DOMANDA
"per quali valori di x il primo fattore è positivo"

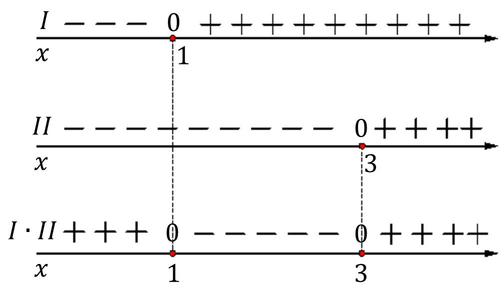
RISPOSTA
"se x è maggiore di 1 "

$$\boxed{x: II > 0} \Longrightarrow x - 3 > 0 \Longrightarrow \boxed{x > 3}$$

DOMANDA
"per quali valori di x il primo fattore è positivo"

RISPOSTA
"se x è maggiore di 3

A questo punto possiamo rappresentare graficamente il segno dei fattori, una retta sotto l'altra, per poterli confrontare; la terza retta, i basso, descrive il segno del prodotto $I \cdot II$ che stiamo cercando.



Quindi, in definitiva

- $(x-1)\cdot(3-x) > 0 \Longrightarrow x < 1 \vee x > 3$
- $(x-1)\cdot(3-x) < 0 \Longrightarrow 1 < x < 3$
- $(x-1)\cdot(3-x) = 0 \Longrightarrow x = 1 \vee x = 3$

Esempio 2.
Studiamo il segno dell'espressione

$$2x - x^2$$

Abbiamo visto come studiare il segno di un polinomio di grado maggiore di 1 se è scomposto in fattori di primo grado (studiando il segno di ogni fattore e poi confrontandoli).

In questo caso l'espressione *non è scomposta in fattori*, ma raccogliendo il fattore comune x otteniamo

$$x(2-x)$$

e possiamo procedere come nell'esempio precedente.

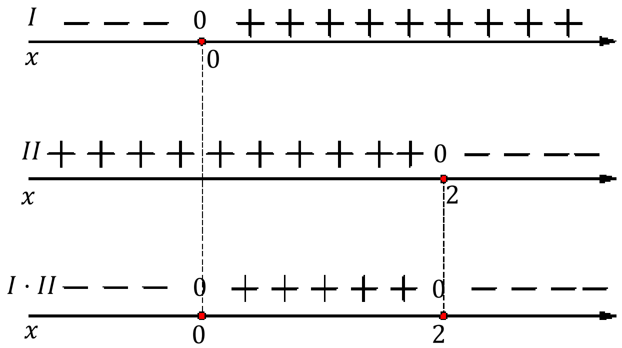
Poniamo

$$I = x \quad \text{primo fattore}$$

$$II = 2 - x \quad \text{secondo fattore}$$

$\boxed{x: I > 0} \Longrightarrow \boxed{x > 0}$

$\boxed{x: II > 0} \Longrightarrow 2 - x > 0 \Longrightarrow \boxed{x < 2}$



Quindi

- $2x - x^2 > 0 \Longrightarrow 0 < x < 2$
- $2x - x^2 < 0 \Longrightarrow x < 0 \vee x > 2$
- $2x - x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0 \vee x = 2$

Esempio 3.
Studiamo il segno di

$$x^2 - 16$$

Anche in questo caso l'espressione non è scomposta in fattori, ma è una differenza di quadrati e la possiamo esprimere come

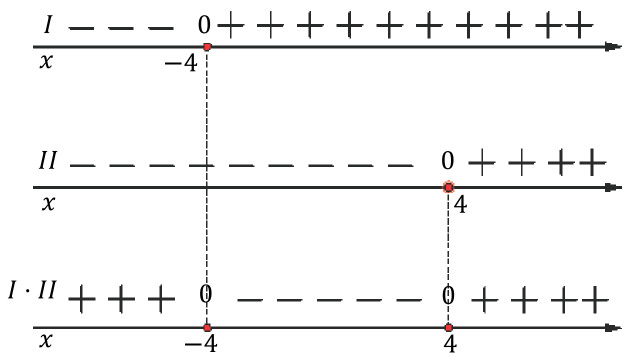
$$(x + 4) \cdot (x - 4)$$

Poniamo $I = x - 4$ e $II = x + 4$ e studiamo il segno di ogni fattore.

$\boxed{x: I > 0} \Longrightarrow x + 4 > 0 \Longrightarrow \boxed{x > -4}$

$\boxed{x: II > 0} \Longrightarrow x - 4 > 0 \Longrightarrow \boxed{x > 4}$

Rappresentando graficamente il segno dei fattori e confrontandoli otteniamo



Quindi

- $x^2 - 16 > 0 \Longrightarrow x < -4 \vee x > 4$
- $x^2 - 16 < 0 \Longrightarrow -4 < x < 4$
- $x^2 - 16 = 0 \Longrightarrow x = -4 \vee x = 4$

Esempio 4.
Studiamo il segno di

$$x^3 - 2x^2 + x$$

Scomponiamo anzitutto il polinomio in fattori e otteniamo

$$x \cdot (x - 1)^2$$

Rimangono così individuati i fattori

$I = x$ fattore lineare

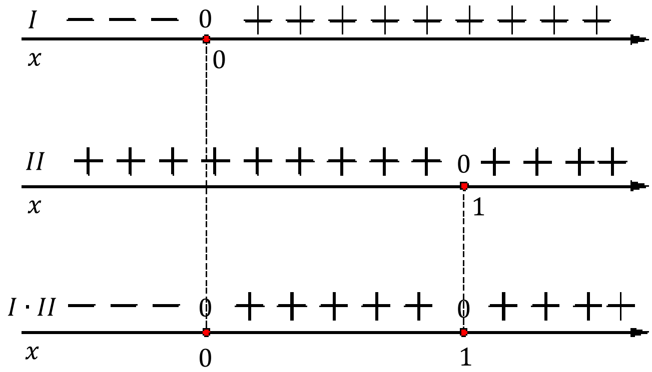
$II = (x - 1)^2$ fattore quadratico

Studiamo quindi i segni dei fattori.

$\boxed{x: I > 0} \Longrightarrow \boxed{x > 0}$

$\boxed{x: II > 0} \Longrightarrow (x - 1)^2 > 0 \Longrightarrow \boxed{x \neq 1}$

Graficamente



Pertanto

- $x^3 - 2x^2 + x > 0 \Longrightarrow 0 < x < 1 \vee x > 1$
- $x^3 - 2x^2 + x < 0 \Longrightarrow x < 0$
- $x^3 - 2x^2 + x = 0 \Longrightarrow x = 0 \vee x = 1$

Dalle considerazioni precedenti e dagli esempi svolti, possiamo dare un procedimento che consente di studiare il segno di un polinomio di grado maggiore di 1.

Studio del segno di un polinomio di grado superiore al primo

Schema risolutivo

1. Scomponiamo il polinomio in fattori di primo grado o in quadrati
2. Studiamo il segno dei fattori, cercando i valori di x che li rendono positivi
3. Rappresentiamo graficamente su rette orientate i segni dei fattori e confrontiamoli
4. Scriviamo analiticamente il segno del polinomio:
    - $P(x) > 0 \Longrightarrow x \dots$
    - $P(x) < 0 \Longrightarrow x \dots$
    - $P(x) = 0 \Longrightarrow x \dots$

Esercizi.
Studia il segno dei seguenti polinomi di grado superiore al primo

1) $P(x) = x^2 - 1$	2) $P(x) = x^2 - 3x$
3) $P(x) = x^2 - 3x + 2$	4) $P(x) = 2x - 5x^2$
5) $P(x) = 9 - x^2$	6) $P(x) = -x^2 + x + 30$
7) $P(x) = -x^2 + 4$	8) $P(x) = x^3 - 4x$
9) $P(x) = x^3 + 5x^2 + 6x$	10) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 12$
11) $P(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$	12) $4x^3 - 3x + 1$

Soluzioni.

1) $P(x) > 0 \Rightarrow\ x < -1 \vee x > 1; P(x) < 0 \Rightarrow x > -1 < x < 1; P(x) = 0 \Rightarrow x = -1 \vee x = 1$

2) $P(x) > 0 \Rightarrow x < 0 \vee x > 3\ ; P(x) < 0 \Rightarrow\ 0 < x < 3; P(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 3$

3) $P(x) > 0 \Rightarrow\ x < 1 \vee x > 2\ ; P(x) < 0 \Rightarrow\ 1 < x < 2; P(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \vee x = 2$

4) $P(x) > 0 \Rightarrow\ 0 < x < \frac{2}{5}; P(x) < 0 \Rightarrow x < 0 \vee x > \frac{2}{5}; P(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \frac{2}{5}$

5) $P(x) > 0 \Rightarrow -3 < x < 3; P(x) < 0 \Rightarrow x < -3 \vee x > 3; P(x) = 0 \Rightarrow x = -3 \vee x = 3$

6) $P(x) > 0 \Rightarrow -6 < x < 5; P(x) < 0 \Rightarrow x < -6 \vee x > 5; P(x) = 0 \Rightarrow x = -6 \vee x = 5$

7) $P(x) > 0 \Rightarrow -2 < x < 2; P(x) < 0 \Rightarrow x < -2 \vee x > 2; P(x) = 0 \Rightarrow x = -2 \vee x = 2$

8) $P(x) > 0 \Rightarrow -2 < x < 0 \vee x > 2; P(x) < 0 \Rightarrow x < -2 \vee 0 < x < 2; P(x) = 0 \Rightarrow x = -2 \vee x = 0 \vee x = 2$

9) $P(x) > 0 \Rightarrow -3 < x < -2 \vee x > 0; P(x) < 0 \Rightarrow x < -3 \vee -2 < x < 0; P(x) = 0 \Rightarrow x = -3 \vee x = -2 \vee x = 0$

10) $P(x) > 0 \Rightarrow -2 < x < \frac{3}{2} \vee x > 2; P(x) < 0 \Rightarrow x < -2 \vee \frac{3}{2} < x < 2; P(x) = 0 \Rightarrow x = -2 \vee x = \frac{3}{2} \vee x = 2$

11) $P(x) > 0 \Rightarrow x > 0; P(x) < 0 \Rightarrow x < -3 \vee -3 < x < 0; P(x) = 0 \Rightarrow x = -3 \vee x = 0$

12) $P(x) > 0 \Rightarrow -1 < x < \frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{2}; P(x) < 0 \Rightarrow x < -1; P(x) = 0 \Rightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{2}$

2.13 Particolari disequazioni intere di grado superiore al primo

Abbiamo visto che per risolvere una disequazione intera di *primo grado* dobbiamo ottenere la disequazione equivalente in forma canonica $ax \lesseqgtr b$ e, se possibile, isolare l'incognita x.

Ora abbiamo tutti gli strumenti per risolvere anche particolari disequazioni di *grado superiore al primo:* vediamo come.

Anzitutto svolgiamo gli eventuali calcoli ai due membri; dopodichè *portiamo tutti i termini al primo membro,* ottenendo una disequazione equivalente della forma

$$P(x) \lesseqgtr 0$$

A questo punto *studiamo il segno del polinomio* $P(x)$, scomponendolo in fattori lineari o quadratici come abbiamo visto: scopriamo così i valori di x che rendono il polinomio positivo, negativo o nullo.

La soluzione della disequazione è costituita dai valori di x che soddisfano la disuguaglianza.

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.
Risolviamo la disequazione

$$x^2 < 4$$

Portiamo anzitutto il termine 4 al primo membro

$$x^2 - 4 < 0$$

A questo punto studiamo il segno del polinomio $x^2 - 4$: scomponendolo in fattori otteniamo

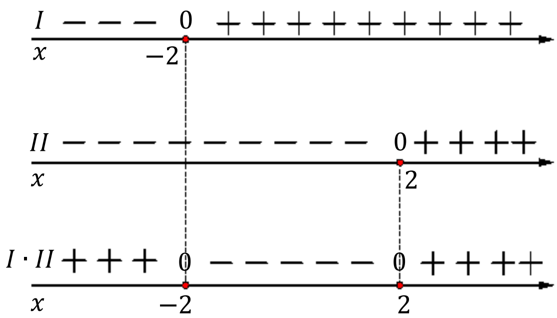
$$(x+2)(x-2) < 0$$

e, posto come al solito $I = x + 2$ e $II = x - 2$ studiamo il segno dei fattori

$\boxed{x: I > 0} \Rightarrow x + 2 > 0 \Rightarrow \boxed{x > -2}$

$\boxed{x: II > 0} \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow \boxed{x > 2}$

Graficamente



L'ultima riga della tabella rappresenta il segno di $(x+2)(x-2)$: ci indica per quali valori di x il polinomio è positivo, negativo e nullo.

Noi cerchiamo i valori di x che rendono il polinomio negativo: dall'ultima riga della tabella vediamo che i valori cercati sono quelli compresi tra -2 e 2.

Pertanto la soluzione della disequazione è

$$S =]-2{,}2[$$

Osservazione.
Per risolvere disequazioni del tipo $P(x) < 0, P(x) > 0, P(x) \geq 0$ o $P(x) \leq 0$ si procede nello stesso modo:

- *prima* si studia il segno del polinomio $P(x)$
- *dopo* si individua la soluzione, data dai valori di x che rendono vera la disuguaglianza.

Esempio 2.
Troviamo la soluzione della disequazione di terzo grado

$$x^3 < 4x(x-1)$$

Svolgiamo i calcoli e mandiamo tutti i termini al primo membro: otteniamo così

$$x^3 - 4x^2 + 4x \leq 0$$

Ora dobbiamo studiare il segno del polinomio $x^3 - 4x^2 + 4x$; scomponiamolo in fattori

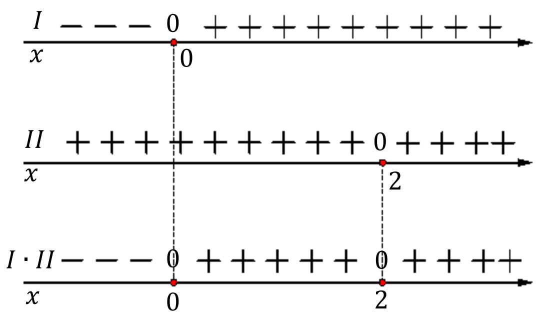
$$\underbrace{x}_{I}\underbrace{(x-2)^2}_{II} \leq 0$$

e studiamo i segni dei fattori.

$\boxed{x: I > 0} \Rightarrow \boxed{x > 0}$

$\boxed{x: II > 0} \Rightarrow (x-2)^2 > 0 \Rightarrow \boxed{x \neq 2}$

Graficamente



L'ultima riga ci fornisce tutte le informazioni sul segno del polinomio: dove è positivo, negativo e nullo.

La soluzione della disequazione è costituita dai valori di x che rende il polinomio negativo o zero, dunque

$$S: x \leq 0 \vee x = 2$$

o, in altri termini

$$S =]-\infty, 0] \cup \{2\}$$

Osservazione.
Grazie allo studio del segno del polinomio, siamo in grado di ottenere la soluzione delle seguenti disequazioni senza effettuare ulteriori calcoli

- $x^3 - 4x^2 + 4x > 0 \Rightarrow S: 0 < x < 2 \vee x > 2$
- $x^3 - 4x^2 + 4x \geq 0 \Rightarrow S: x \geq 0$
- $x^3 - 4x^2 + 4x < 0 \Rightarrow S: x < 0$

Esempio 3.
Risolviamo

$$x^3 + x > 0$$

Tutti i termini sono già al primo membro: scomponiamo quindi in fattori il polinomio $x^3 + x$ e otteniamo

$$\underbrace{x}_{I}\underbrace{(x^2+1)}_{II} > 0$$

Osserviamo che il secondo fattore $x^2 + 1$ ha un comportamento particolare in termini del segno; abbiamo visto che x^2 è una quantità variabile, ma comunque o positiva o nulla: pertanto la quantità (seppur variabile) $x^2 + 1$ è *positiva per qualunque valore di* x.

Proprio *a causa della sua positività*, è possibile ottenere una disequazione equivalente a $x(x^2 + 1) > 0$ dividendo i due membri per $x^2 + 1$, *certi che il verso rimanga invariato.*

Quindi

$$\frac{x(x^2+1)}{x^2+1} > \frac{0}{x^2+1}$$

ovvero

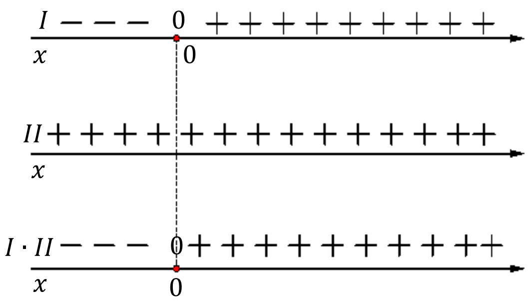
$$x > 0$$

Pertanto la soluzione della disequazione è $S =]0, +\infty[$.

In alternativa potevamo procedere in modo più pedante, studiando come abbiamo visto negli esempi precedenti il segno dei due fattori:

$\boxed{x{:}\, I > 0} \Longrightarrow \boxed{x > 0}$

$\boxed{x{:}\, II > 0} \Longrightarrow x^2 + 1 > 0 \Longrightarrow \boxed{\forall x \in \mathbb{R}}$



Otteniamo così – ovviamente – la medesima soluzione $S =]0, +\infty[$.

Esercizi.
Risolvi le seguenti disequazioni intere di grado superiore al primo

1) $x^2 \geq 1$	2) $x^2 \geq -1$
3) $x^2 < x$	4) $2x < x^2$
5) $x^2 + 4 \leq 0$	6) $x^2 + 4 > 0$
7) $x^2 - x^3 > 0$	8) $x^2 - x^3 \leq 0$
9) $x^2 + 5x < 6$	10) $x^3 + 4x^2 + 4x < 0$
11) $x^3 + 4x^2 \geq 0$	12) $x^3 + 4x \geq 0$
13) $x^3 - 3x < 2$	14) $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 < 0$
15) $x^2(x-1)^2 \leq 0$	16) $x^2(x-1)^2 > 0$

Soluzioni.

1) $S{:}\, x < -1 \vee x > 1$ 2) $S = \mathbb{R}$

3) $S =]0,1[$ 	4) $S: x < 0 \vee x > 2$

5) $S = \emptyset$ 	6) $S: \forall x \in \mathbb{R}$

7) $S: x < 0 \vee 0 < x < 1$ 	8) $S: x = 0 \vee x \geq 1$

9) $S: -6 < x < 1$ 	10) $x < 0 \wedge x \neq -2$

11) $S: x \geq -4$ 	12) $S = [0, +\infty[$

13) $S: x < -1 \vee -1 < x < 2$ 	14) $S: x < -2$

15) $S = \{0,1\}$ 	16) $S: x \neq 0 \wedge x \neq 1$

2.14 Segno di una frazione algebrica in una variabile

Sinora abbiamo visto come studiare il segno di polinomi lineari, di quadrati e di particolari polinomi di grado superiore al primo: abbiamo poi utilizzato questi risultati per risolvere disequazioni di grado maggiore di uno.

In modo simile vedremo che, per risolvere le disequazioni fratte, dovremo studiare il segno di frazioni algebriche contenenti una variabile x.

Diamo il seguente, fondamentale risultato preliminare.

Teorema.
Siano N e D dei numeri reali.
La scrittura

$$\frac{N}{D}$$

è priva di significato se $D = 0$.

Inoltre, se $D \neq 0$

- $\frac{N}{D} > 0$ se $N > 0$ e $D > 0$ oppure se $N < 0$ e $D < 0$ (ovvero se N e D sono *concordi*)
- $\frac{N}{D} < 0$ se $N > 0$ e $D < 0$ oppure se $N < 0$ e $D > 0$ (ovvero se N e D sono *discordi*)
- $\frac{N}{D} = 0$ se $N = 0$.

Questo risultato ci assicura che conoscendo il segno del numeratore e del denominatore di una frazione, possiamo stabilire se la frazione è una espressione definita e determinarne il segno.

Vediamo qualche esempio di studio del segno di una frazione.

Studio del segno di una frazione contenente una variabile
Schema risolutivo

1. Scomponiamo il numeratore e il denominatore in fattori di primo grado o in quadrati
2. Studiamo il segno dei fattori, cercando i valori di x che li rendono positivi
3. Rappresentiamo graficamente i segni dei fattori e confrontiamoli
4. Scriviamo analiticamente i valori della variabile che rendono la frazione priva di significato, positiva, negativa o nulla

    - $\frac{N}{D}$ non è definita se…
    - $\frac{N}{D} > 0 \Longrightarrow x \ldots$
    - $\frac{N}{D} < 0 \Longrightarrow x \ldots$
    - $\frac{N}{D} = 0 \Longrightarrow x \ldots$

Vediamo qualche esempio.

Esempio 1.
Studiamo il segno della frazione

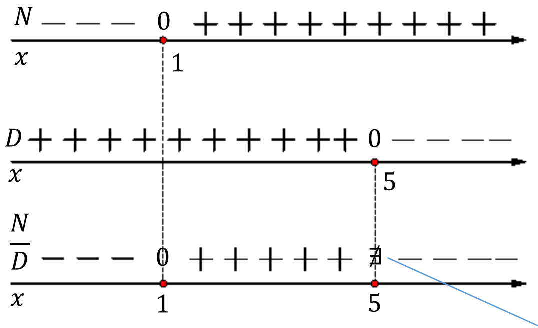
$$\frac{x-1}{5-x}$$

Studiamo preliminarmente i segni del numeratore e del denominatore (ciò significa trovare i valori di x in prossimità dei quali sono positivi, negativi e nulli): sappiamo che è sufficiente cercare i valori di x che li rendono positivi.

Dopopdichè, confrontandoli e ricordando il teorema precedente, ricaveremo tutte le informazioni che cerchiamo sulla frazione.

$\boxed{x: N > 0} \Longrightarrow x - 1 > 0 \Longrightarrow \boxed{x > 1}$

$\boxed{x: D > 0} \Longrightarrow 5 - x > 0 \Longrightarrow -x > -5 \Longrightarrow \boxed{x < 5}$



se $x = 5$ il denominatore è nullo: useremo il simbolo "∄" per indicare che la frazione non ha significato in corrispondenza di questo valore.

L'ultima riga descrive il segno della frazione al variare di x.

Esplicitamente

- $\frac{x-1}{5-x}$ è priva di significato se $x = 5$
- $\frac{x-1}{5-x} > 0 \Longrightarrow 1 < x < 5$
- $\frac{x-1}{5-x} < 0 \Longrightarrow x < 1 \vee x > 5$
- $\frac{x-1}{5-x} = 0 \Longrightarrow x = 5$

Esempio 2.
Studiamo il segno della frazione

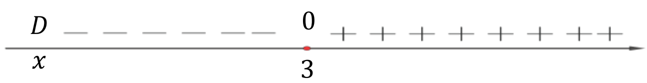
$$\frac{1}{x-3}$$

Osserviamo che, diversamente dall'esempio precedente, in questo caso il denominatore è costante e vale 1 qualunque sia il valore che attribuiamo a x.

La frazione non è mai nulla e il suo segno dipende esclusivamente dal segno del denominatore: in particolare, se il denominatore è positivo la frazione è positiva, se è negativo la frazione è negativa e se il denominatore vale zero la frazione è una espressione priva di significato.

Studiamo quindi il segno del denominatore.

$\boxed{x: D > 0} \Longrightarrow x - 3 > 0 \Longrightarrow \boxed{x > 3}$



Pertanto

- $\frac{1}{x-3}$ è priva di significato se $x = 3$
- $\frac{1}{x-3} > 0 \Longrightarrow x > 3$
- $\frac{1}{x-3} < 0 \Longrightarrow x < 3$

- $\frac{1}{x-3} = 0 \Longrightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$

Usando lo stesso procedimento possiamo studiare il segno di frazioni anche complicate, dove numeratore e denominatore sono espressioni scomposte in fattori di primo grado o quadrati.

Per convenzione chiamiamo i fattori del numeratore $N_1, N_2, N_3 \ldots$ (primo fattore del numeratore, secondo, terzo…) e $D_1, D_2, D_3 \ldots$ (primo fattore del denominatore, secondo, terzo…).

Consideriamo per fissare le idee la frazione

$$\frac{N_1 \cdot N_2}{D_1 \cdot D_2}$$

Se conosciamo il segno di N_1, N_2, D_1, D_2 sappiamo tutto sul segno della frazione: ad esempio se D_1 o D_2 sono nulli la frazione non ha significato; in caso contrario, se N_1 o N_2 valgono zero anche la frazione è zero; se tutti i fattori sono positivi anche la frazione è positiva, e così via…

Esempio 3.
Studiamo il segno di

$$\frac{x^2 - 2x}{x^2 + 4x + 3}$$

In questo caso sia il numeratore che il denominatore sono polinomi di secondo grado: dobbiamo allora scomporli in fattori di primo grado o in quadrati.

Risulta così

$$\frac{\overbrace{x}^{N_1} \cdot \overbrace{(x-2)}^{N_2}}{\underbrace{(x+1)}_{D_1} \cdot \underbrace{(x+3)}_{D_2}}$$

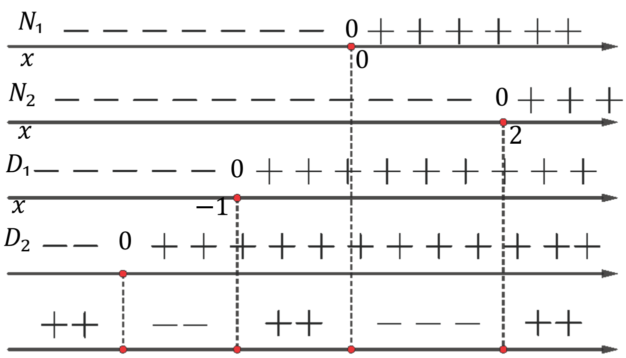
Ora studiamo i segni dei fattori.

$\boxed{x: N_1 > 0} \Longrightarrow \boxed{x > 0}$

$\boxed{x: N_2 > 0} \Longrightarrow x - 2 > 0 \Longrightarrow \boxed{x > 2}$

$\boxed{x: D_1 > 0} \Longrightarrow x + 1 > 0 \Longrightarrow \boxed{x > -1}$

$\boxed{x: D_2 > 0} \Longrightarrow x + 3 > 0 \Longrightarrow \boxed{x > -3}$



x -3

$\frac{N}{D}$ $\nexists$ $\nexists$ 0 0

x -3 -1 0 2

Pertanto

- $\frac{N}{D}$ è priva di significato se $x = -3 \vee x = -1$
- $\frac{N}{D} > 0 \Longrightarrow x < -3 \vee -1 < x < 0 \vee x > 2$
- $\frac{N}{D} < 0 \Longrightarrow -3 < x < -1 \vee 0 < x < 2$
- $\frac{N}{D} = 0 \Longrightarrow x = 0 \vee x = 2$

Esempio 4.
Studiamo il segno di

$$\frac{x^3 - 2x^2 + x}{x - 3}$$

Il denominatore è già un polinomio lineare; scomponendo il numeratore otteniamo

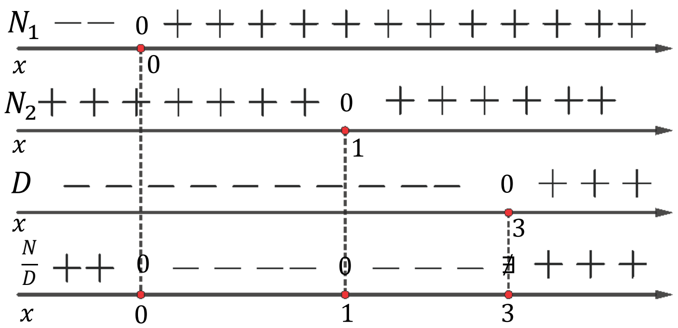
$$\frac{\overbrace{x}^{N_1} \cdot \overbrace{(x-1)^2}^{N_2}}{\underbrace{x - 3}_{D}}$$

Studiamo quindi i segni di N_1, N_2 e D.

$\boxed{x: N_1 > 0} \Longrightarrow \boxed{x > 0}$

$\boxed{x: N_2 > 0} \Longrightarrow (x-1)^2 > 0 \Longrightarrow \boxed{x \neq 1}$

$\boxed{x: D > 0} \Longrightarrow x - 3 > 0 \Longrightarrow \boxed{x > 3}$



Quindi

- $\frac{N}{D}$ non è definita se $x = 3$
- $\frac{N}{D} > 0 \Longrightarrow x < 0 \vee x > 3$
- $\frac{N}{D} < 0 \Longrightarrow 0 < x < 1 \vee 1 < x < 3$
- $\frac{N}{D} = 0 \Longrightarrow x = 0 \vee x = 1$

Esempio 5.
Studiamo il segno di

$$\frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$$

In questo caso sia il numeratore che il denominatore sono polinomi di secondo grado.

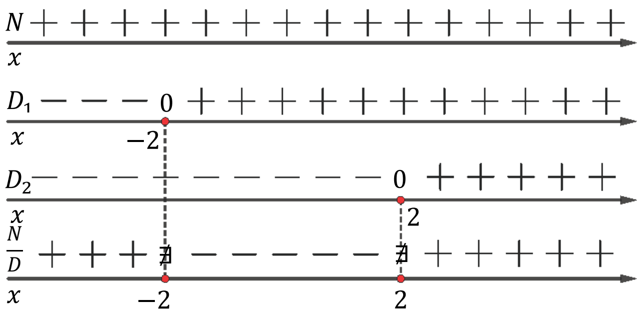
Osserviamo che, mentre il denominatore è scomponibile in fattori lineari – è una differenza di quadrati – il numeratore è irriducibile: si tratta comunque di una quantità positiva per ogni valore di x, visto che è la somma di un quadrato e di un numero positivo.

$$\frac{\overbrace{x^2 + 4}^{N}}{\underbrace{(x + 2)}_{D_1}\underbrace{(x - 2)}_{D_2}}$$

$\boxed{x: N > 0} \Longrightarrow \boxed{\forall x \in \mathbb{R}}$

$\boxed{x: D_1 > 0} \Longrightarrow x + 2 > 0 \Longrightarrow \boxed{x > -2}$

$\boxed{x: D_2 > 0} \Longrightarrow x - 2 > 0 \Longrightarrow \boxed{x > 2}$



In definitiva

- $\frac{N}{D}$ non è definita se $x = -2 \vee x = 2$
- $\frac{N}{D} > 0 \Longrightarrow x < -2 \vee x > 2$
- $\frac{N}{D} < 0 \Longrightarrow -2 < x < 2$
- $\frac{N}{D} = 0 \Longrightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$

Esercizi.

Studia, al variare della variabile x, il segno delle seguenti frazioni.

1) $\frac{1}{x}$	2) $\frac{1}{x^2}$	3) $\frac{1}{5-x}$	4) $\frac{2}{x^2+1}$
5) $\frac{4}{x^2-4}$	6) $\frac{1}{x-x^2}$	7) $\frac{x-1}{x+1}$	8) $\frac{x^2+1}{x-1}$
9) $\frac{x^2-2x}{x}$	10) $\frac{x}{x^2-2x}$	11) $\frac{x^2-9}{x^2+9}$	12) $\frac{x^2-1}{x^2-9}$
13) $\frac{x^2+1}{x^2+9}$	14) $\frac{x^3-2x^2+x}{x^2-x}$	15) $\frac{x^2-6x+1}{2x-2}$	16) $\frac{x^2-x-2}{2x-2}$
17) $\frac{x^2-2x+1}{x^2+8x+16}$	18) $\frac{x^3+x}{x}$	19) $\frac{x^3-4x^2}{x+1}$	20) $\frac{x^3-6x^2+9x}{x^2-3x}$

Soluzioni.

	non definita	$\frac{N}{D} > 0$	$\frac{N}{D} < 0$	$\frac{N}{D} = 0$
1)	$x = 0$	$x > 0$	$x < 0$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
2)	$x = 0$	$x \neq 0$	$\nexists x \in \mathbb{R}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
3)	$x = 5$	$x < 5$	$x > 5$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
4)	$\nexists x \in \mathbb{R}$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
5)	$x = -2 \vee x = 2$	$x < -2 \vee x > 2$	$-2 < x < 2$	$\nexists x \in \mathbb{R}$

6)	$x = 0 \vee x = 1$	$0 < x < 1$	$x < 0 \vee x > 1$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
7)	$x = -1$	$x < -1 \vee x > 1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$
8)	$x = 1$	$x > 1$	$x < 1$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
9)	$x = 0$	$x > 2$	$x < 0 \vee 0 < x < 2$	$x = 2$
10)	$x = 0 \vee x = 2$	$x > 2$	$x < 0 \vee 0 < x < 2$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
11)	$\nexists x \in \mathbb{R}$	$x < -3 \vee x > 3$	$-3 < x < 3$	$x = -3 \vee x = 3$
12)	$x = -3 \vee x = 3$	$x < -3 \vee -1 < x < 1 \vee$ $x > 3$	$-3 < x < 1 \vee$ $1 < x < 3$	$x = -1 \vee x = 1$
13)	$\nexists x \in \mathbb{R}$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
14)	$x = 0 \vee x = 1$	$x > 1$	$x < 0 \vee 0 < x < 1$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
15)	$x = 1$	$-3 < x < 1 \vee x > 2$	$x < -3 \vee 1 < x < 2$	$x = -3 \vee x = 2$
16)	$x = -1 \vee x = 1$	$-1 < x < 1 \vee x > 2$	$x < -1 \vee 1 < x < 2$	$x = 2$
17)	$x = -4$	$x \neq -4 \wedge x \neq 1$	$\nexists x \in \mathbb{R}$	$x = 1$
18)	$x = 0$	$x \neq 0$	$\nexists x \in \mathbb{R}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
19)	$x = -1$	$x < -1 \vee x > 4$	$-1 < x < 0 \vee$ $0 < x < 4$	$x = 0 \vee x = 4$
20)	$x = 0 \vee x = 3$	$x > 3$	$x < 0 \vee 0 < x < 3$	$\nexists x \in \mathbb{R}$

2.15 Disequazioni fratte

Ricordiamo che una disequazione fratta è una disuguaglianza in cui compare l'incognita in un denominatore.

Consideriamo ad esempio la disequazione

$$\frac{x-1}{x-2} > 0$$

Per trovare la soluzione, può venire naturale ricordare il procedimento che applichiamo per risolvere l'equazione fratta

$$\frac{x-1}{x-2} = 0$$

In questo caso, dopo aver determinato le $CE: x \neq 2$, moltiplichiamo i due membri per $x - 2$

$$(x-2) \cdot \frac{x-1}{x-2} = 0 \cdot (x-2)$$

eliminando così il denominatore e ottenendo l'equazione equivalente

$$x - 1 = 0$$

che fornisce la soluzione accettabile $S = \{1\}$.

Possiamo applicare lo stesso procedimento per risolvere la disequazione? *La risposta è NO!*

Noi sappiamo infatti che, data una disequazione, otteniamo una disequazione equivalente se

- moltiplichiamo i due membri per una quantità *positiva* e lasciamo *inalterato il verso* della disuguaglianza
- moltiplichiamo per un numero *negativo* e *invertiamo il verso* alla disuguaglianza

La criticità – determinante – in questo caso è che non è detto che $x - 2$ rappresenti una quantità positiva (può essere positiva, ma anche negativa e nulla a seconda dei valori di x).

In questo caso, se da

$$\frac{x-1}{x-2} > 0$$

moltiplichiamo per $x - 2$

$$(x-2) \cdot \frac{x-1}{x-2} > 0 \cdot (x-2)$$

otteniamo

$$x - 1 > 0$$

che *non è equivalente alla disequazione di partenza:* il verso della disuguaglianza è lo stesso ma, come abbiamo detto, $x - 2$ non è una quantità necessariamente positiva.

Diversa è la situazione per la disequazione

$$\frac{x-1}{x^2+4} > 0$$

In questo caso il denominatore $x^2 + 4$ è sì una quantità variabile, ma necessariamente positiva (x^2 è positiva o zero e sommata a 4 dà un numero positivo).

Pertanto in questo caso moltiplicare per il denominatore i due membri lasciando inalterato il verso della disuguaglianza è una operazione lecita e fornisce la disequazione equivalente

$$(x^2+4) \cdot \frac{x-1}{x^2+4} > 0 \cdot (x^2+4)$$

ovvero

$$x - 1 > 0$$

la cui soluzione (e quindi la soluzione della disequazione di partenza) è $S =]1, +\infty[$.

In generale quindi non è possibile risolvere le disequazioni fratte applicando il procedimento risolutivo che avevamo descritto per le equazioni fratte.

Vediamo come procedere.

Risoluzione di una disequazione fratta

Schema risolutivo

1. Trasportiamo i termini dal secondo membro al primo
2. Svolgiamo i calcoli, esprimendo il primo membro come frazione

$$\frac{N}{D} \lesseqgtr 0$$

3. Studiamo il segno della frazione, ovvero
   - se il numeratore o il denominatore sono polinomi di grado superiore al primo, scomponiamoli in fattori lineari, o i quadrati, o in fattori del tipo $x^2 + k, k > 0$
   - studiamo il segno di ogni fattore
   - rappresentiamo graficamente i segni dei fattori e confrontiamoli
4. Scriviamo la soluzione, ottenuta dai valori di x che rendono vera la disuguaglianza

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.
Risolviamo

$$\frac{1}{x} < 1$$

Portiamo 1 al primo membro

$$\frac{1}{x} - 1 < 0$$

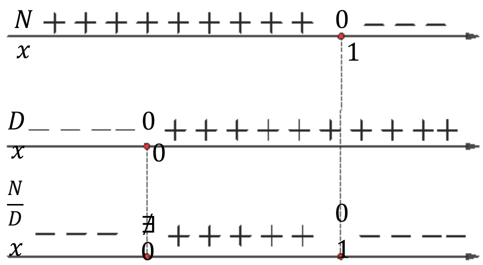
e svolgiamo i calcoli

$$\frac{1-x}{x} < 0$$

Ora studiamo il segno della frazione (scopriremo i valori di x per cui la frazione è positiva, negativa e nulla: di questi valori, *alla fine,* sceglieremo quelli che rendono la frazione negativa).

$\boxed{x: N > 0} \Longrightarrow 1 - x > 0 \Longrightarrow -x > -1 \Longrightarrow \boxed{x < 1}$

$\boxed{x: D > 0} \Longrightarrow \boxed{x > 0}$



In definitiva

$S: x < 0 \vee x > 1$ o, in modo equivalente $S =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

Esempio 2.
Risolviamo

$$\frac{1}{x} < x$$

Portiamo x al primo membro e scolgiamo i calcoli

$$\frac{1 - x^2}{x} \leq 0$$

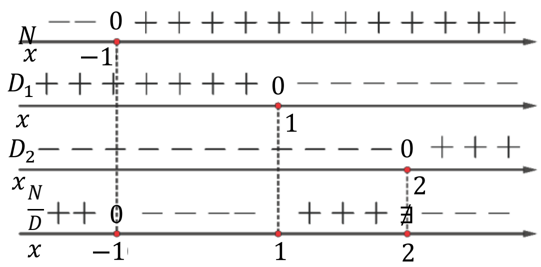
Dobbiamo studiare il segno della frazione: il numeratore è un polinomio di secondo grado, quindi scomponiamolo in fattori e otteniamo

$$\frac{(1 + x)(1 - x)}{x} \leq 0$$

$\boxed{x: N_1 > 0} \Rightarrow 1 + x > 0 \Rightarrow \boxed{x > -1}$

$\boxed{x: N_1 > 0} \Rightarrow 1 - x > 0 \Rightarrow -x > -1 \Rightarrow \boxed{x < 1}$

$\boxed{x: D_2 > 0} \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow \boxed{x > 2}$



La soluzione è quindi $S: -1 \leq x < 1 \vee x > 2$.

Esempio 3.
Risolviamo

$$\frac{1}{x - 1} \geq \frac{1}{x - 2}$$

Portiamo il termine del secondo membro al primo

$$\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x - 2} \geq 0$$

e svolgiamo i calcoli

$$\frac{-1}{(x - 1)(x - 2)} \geq 0$$

A questo punto è comodo, anche se non indispensabile, moltiplicare per -1 i due membri (ricordiamo che dobbiamo invertire il verso della disuguaglianza)

$$\frac{1}{(x - 1)(x - 2)} \leq 0$$

Arrivati a questo punto possiamo procedere in vari modi.

Primo modo.
Possiamo studiare il segno della frazione, come abbiamo fatto sinora.

Riconosciamo che il numeratore è positivo per ogni assegnazione di x; posto poi $D_1 = x - 1$ e $D_2 = x - 2$, studiamo i segni e li confrontiamo. La risoluzione è lasciata per esercizio.

Secondo modo.

Possiamo ragionare direttamente sul segno della frazione: osserviamo anzitutto che la frazione non può valere zero, perché il numeratore non è mai nullo, quindi la nostra richiesta si riduce a

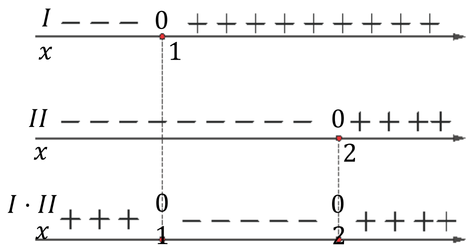
$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} < 0$$

Dopodichè, sapendo che una frazione è negativa se il numeratore e il denominatore sono discordi, osserviamo che la disuguaglianza è verificata se e solo se il denominatore è negativo, ovvero se

$$(x-1)(x-2) < 0$$

Ora studiamo i segni dei fattori

$\boxed{x: I > 0} \Longrightarrow x - 1 > 0 \Longrightarrow \boxed{x > 1}$
$\boxed{x: II > 0} \Longrightarrow x - 2 > 0 \Longrightarrow \boxed{x > 2}$



Quindi $S =]1,2[$.

Esempio 4.
Risolviamo

$$\frac{x}{x+1} \geq \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$$

Portiamo i termini dal secondo al primo membro

$$\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} \geq 0$$

e svolgiamo i calcoli

$$\frac{x^2+1}{x(x+1)} \geq 0$$

Il numeratore è polinomio di secondo grado, ma irridicibile: è comunque una espressione positiva per ogni valore di x.

È certamente possibile risolvere la disequazione studiando il segno della frazione: in questo caso la risolveremo con un metodo più diretto, come nell'esempio precedente.

Anzitutto, visto che come abbiamo già osservato $x^2 + 1 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, possiamo ottenere una disequazione equivalente dividendo i due membri per $x^2 + 1$ (o, il che è lo stesso, moltiplicandoli per $\frac{1}{x^2+1}$), lasciando inalterato il verso della disuguaglianza.

$$\frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{x^2+1}{x(x+1)} \geq 0 \cdot \frac{1}{x^2+1}$$

ottenendo così la frazione euivalente

$$\frac{1}{x(x+1)} \geq 0$$

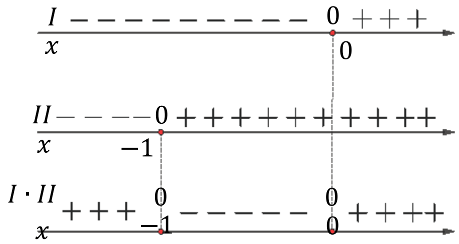
La frazione, avendo il numeratore costante 1 non può essere mai nulla; inoltre la disequazione è verificata se e solo se

$$x(x+1) > 0$$

A questo punto studiamo i segni dei fattori

$\boxed{x: I > 0} \Rightarrow \boxed{x > 0}$

$\boxed{x: II > 0} \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow \boxed{x > -1}$



Quindi $S: x < -1 \lor x > 0$ o, in modo equivalente

$S =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

Esercizi.

Trova la soluzione delle seguenti disequazioni fratte.

1) $\frac{1}{6-x} \geq 0$

2) $\frac{1}{x-1} \leq 1$

3) $\frac{x-2}{1+x} < 1$

4) $\frac{x-1}{x+1} + \frac{3}{x} < \frac{x+1}{x}$

5) $\frac{x}{2} > 1 - \frac{1}{2x}$

6) $\frac{1}{x+3} > \frac{1}{x-3}$

7) $4 < \frac{3}{2+x}$

8) $x \geq \frac{1}{4x-3}$

9) $\frac{x+1}{x^2-4} \leq \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2+4x+4}$

10) $1 - \frac{6}{1-4x^2} > \frac{2}{2x-1} - \frac{3}{2x+1}$

Soluzioni.

1) $S: x < 6$

2) $S: x < 1 \lor x \geq 2$

3) $S =]-1, +\infty[$

4) $S =]-1,0[$

5) $S: x > 0 \land x \neq 1$

6) $S: -3 < x < 3$

7) $S = \left]-2, -\frac{5}{4}\right[$

8) $S = \left]-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right[\cup [1, +\infty[$

9) $S: -4 < x < -2 \lor -2 < x < 2$

10) $S: x < -\frac{1}{2} \lor -\frac{1}{2} < x < 0 \lor x > \frac{1}{2}$

2.16 Sistemi di disequazioni

Definizione.
Chiamiamo *sistema di disequazioni* un insieme di due o più disequazioni.

Le disequazioni sono scritte una sotto l'altra e sono legate tra loro da una parentesi graffa.

$$\begin{cases} disequazione\ 1 \\ disequazione\ 2 \\ \quad\quad \dots \end{cases} \qquad \text{sistema di disequazioni}$$

Si chiama *soluzione del sistema* l'insieme S che ha per elementi i numeri che sono soluzione *di ogni equazione* che costituisce il sistema.

Chiamiamo $S_1, S_2, S_3, \dots$ le soluzioni della prima, della seconda e della terza disequazione: la soluzione del sistema contiene i loro elementi comuni, pertanto

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \dots$$

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.
Troviamo la soluzione del sistema

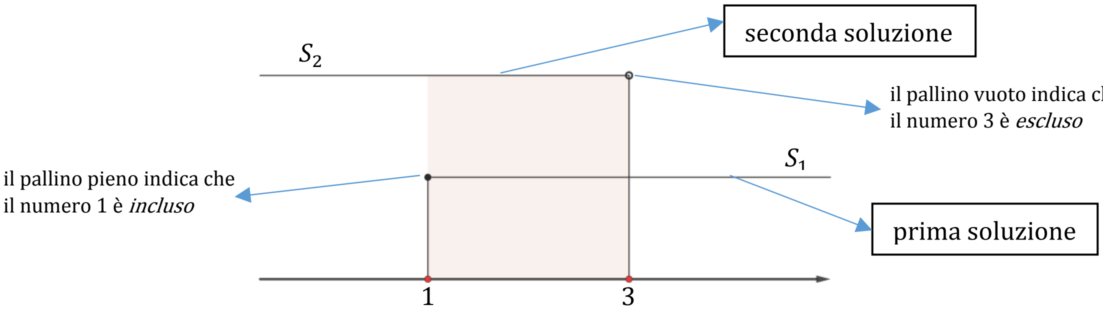
$$\begin{cases} x > 1 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

Questo è un sistema molto semplice e la soluzione può essere trovata direttamente.

Vogliamo comunque descrivere un procedimento che potremo utilizzare anche per risolvere sistemi più complessi.

L'idea è di dare una rappresentazione grafica, che consiste – fissata una retta dei numeri - nell'evidenziare con una linea continua le soluzioni delle disequazioni una sopra l'altra: in questo modo è facile individuare i valori comuni alle soluzioni.

In questo caso



La soluzione del sistema, data dai valori comuni delle soluzioni, è $S = [1,3[$ o, in altri termini, $S: 1 \leq x < 3$.

Esempio 2.
Troviamo la soluzione del sistema

$$\begin{cases} x < 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

In questo caso non esiste alcun numero che rende vere le due condizioni: l'insieme delle soluzioni quindi non ha elementi e $S = \emptyset$.

Esempio 3.
Risolviamo

$$\begin{cases} x > 1 \\ 0 \cdot x > 3 \end{cases}$$

La seconda disequazioni non ha soluzioni.

Se non esiste alcun numero che la rende vera, a maggior ragione non può esistere un numero che soddisfa entrambe le disequazioni: quindi, anche in questo caso, $S = \emptyset$.

Esempio 4.
Risolviamo

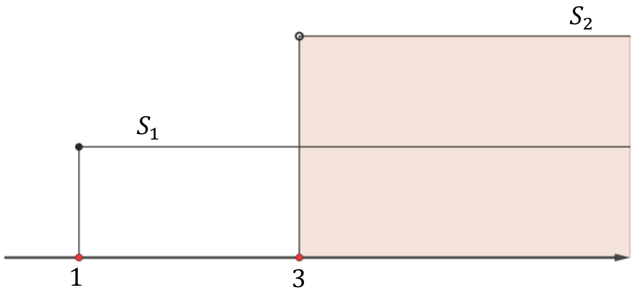
$$\begin{cases} 0 \cdot x > -1 \\ 0 \cdot x \leq 3 \end{cases}$$

Le due disequazioni sono verificate per ogni valore reale di x: questo significa che ogni numero soddisfa le due condizioni, pertanto $S = \mathbb{R}$.

Esempio 5.
Risolviamo

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x > 3 \end{cases}$$

Diamo una rappresentazione grafica

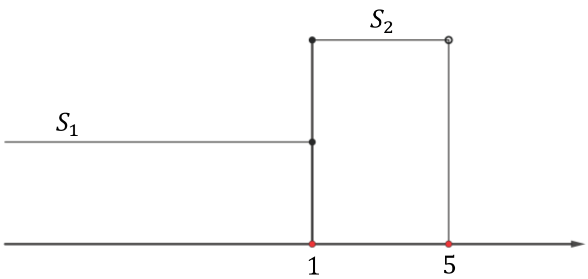


La soluzione è $S =]3, +\infty[$ o, in altri termini $S: x > 3$.

Esempio 6.
Risolviamo

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ 1 \leq x < 5 \end{cases}$$

Graficamente

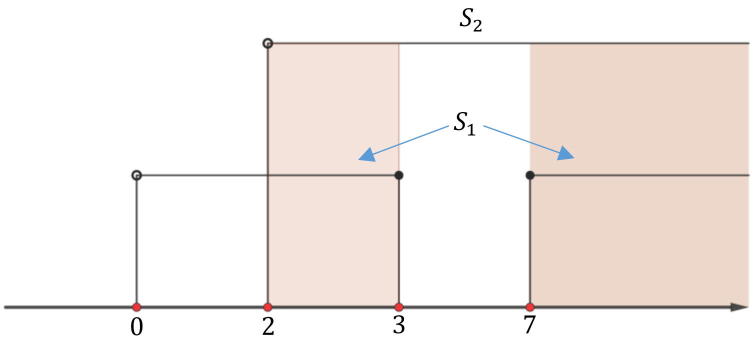


Il numero 1 è l'unico che soddisfa entrambe le disequazioni, quindi $S = \{1\}$.

Esempio 7.
Risolviamo

$$\begin{cases} 0 < x \leq 3 \vee x \geq 7 \\ x > 2 \end{cases}$$

Rappresentiamo graficamente le soluzioni delle disequazioni: osserviamo esplicitamente che si tratta di *due* soluzioni, dunque le rappresenteremo su *due* livelli distinti (la prima soluzione, anche se composta da due intervalli, *è comunque un'unica condizione).*



La soluzione è quindi $S: 2 \leq x \leq 3 \vee x \geq 7$ o, allo stesso modo $S =]2,3] \cup [7, +\infty[$.

Esercizi.
Trova la soluzione dei seguenti sistemi elementari di disequazioni.

1) $\begin{cases} x < 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x \geq 4 \\ x > 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x < 1 \\ x \leq 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4 \leq x \leq 6 \\ x > 3 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 4 \leq x \leq 6 \\ x \geq 5 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 6 \vee x > 8 \\ x \leq 9 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x < -3 \vee 0 < x \leq 2 \\ x < 1 \end{cases}$

Soluzioni.
1) $S = \emptyset$
2) $S = [4, +\infty[$
3) $S = \{4\}$
4) $S =]-\infty, 1[$
5) $S =]3,6]$
6) $S = [5,6]$
7) $S = [0,6] \cup]8,9]$
8) $S =]-\infty, -3[\cup]0,1[$

In generale un sistema contenente disequazioni anche complesse può essere risolto seguendo il seguente

Risoluzione dei sistemi di disequazione

Schema risolutivo

Dato un sistema

$$\begin{cases} disequazione\ 1 \\ disequazione\ 2 \\ \quad\quad\ldots \end{cases}$$

1. Risolviamo separatamente le disequazioni che costituiscono il sistema
2. Mettiamo le soluzioni trovate $S_1, S_2, \ldots$ a sistema
$$\begin{cases} S_1 \\ S_2 \\ \ldots \end{cases}$$
3. Rappresentiamo le soluzioni graficamente, come abbiamo visto negli esempi precedenti
4. Scriviamo la soluzione, costituita dai valori comuni a tutte le soluzioni.

Esempio.
Risolviamo

$$\begin{cases} x^2 < 4 \\ 1 > 2x \end{cases}$$

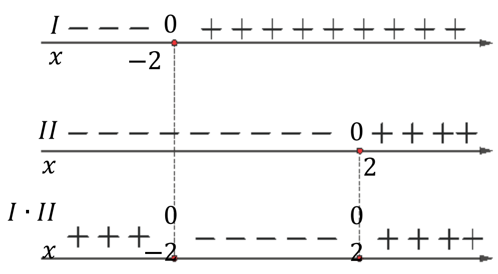
Prima disequazione.
Si tratta di una disequazione di grado superiore al primo: portiamo quindi il 4 al primo membro ottenendo $x^2 - 4 < 0$ che, scomposto in fattori dà

$$(x+2)(x-2) < 0$$

Studiamo il segno dei fattori $I = x + 2$ e $II = x - 2$ e poi confrontiamoli

$\boxed{x: I > 0} \Rightarrow x + 2 > 0 \Rightarrow \boxed{x > -2}$

$\boxed{x: II > 0} \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow \boxed{x > 2}$



Quindi S_1: $-2 < x < 2$.

Seconda disequazione.
È una disequazione di primo grado: in questo caso, dunque, sappiamo che dobbiamo isolare l'incognita x.

Possiamo portare il termine in x al primo membro e 1 al secondo; in questo caso, tuttavia, è possibile isolare x lasciandola al secondo membro: dividendo per 2 otteniamo

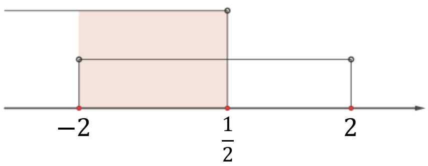
$$\frac{1}{2} > x$$

ovvero $x < \frac{1}{2}$. Pertanto $S_2 \colon x < \frac{1}{2}$.

Mettiamo quindi a sistema le soluzioni trovate

$$\begin{cases} -2 < x < 2 \\ x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Graficamente



Quindi $S = \left]-2, \frac{1}{2}\right[$.

Esercizi.
Trova la soluzione dei seguenti sistemi di disequazioni.

1) $\begin{cases} x - \frac{1}{2} > -3 \\ \frac{x-2}{x+3} > 0 \end{cases}$ *2)* $\begin{cases} 4 < x \\ x \geq x^2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-1)^2 > (x+1)^2 \\ (x+2)^2 > 0 \end{cases}$ *4)* $\begin{cases} \frac{x-4}{x^2+4} \leq 0 \\ \frac{x^2+4}{x-3} \geq 0 \end{cases}$

Soluzioni.
1) $S \colon x > 2$ *2)* $S = \emptyset$
3) $S =]-\infty, -2[\cup]-2, 0[$ *4)* $S =]3,4]$

2.17 Esercizi di ricapitolazione

Esercizio 1.
Siano $a, b > 0$.
Dimostra che

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$$

Sappiamo che per dimostrare questo risultato occorre dimostrare le due proposizioni seguenti

a) $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$
b) $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$

Dimostra inoltre, esibendo un controesempio, che questo risultato non vale se non ammettiamo che a e b siano positivi.

Esercizio 2.
Dimostra che la relazione di ordine fra due numeri positivi e i loro reciproci si inverte.

Esercizio 3.
Dimostra che la media aritmetica fra due numeri è sempre compresa tra i due numeri.

Esercizio 4.
Individua gli insiemi seguenti.

a) $[0, +\infty[- \{0,1\}$
b) $]-\infty, 3] \cap [3, +\infty[$
c) $[1,5[\cap]0,3[$
d) $]-\infty, 1[\cup]0, +\infty[$

Soluzioni.

$a)$ $]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$; $b)$ $\{3\}$; $c)$ $[1,3[$; $d)$ $\mathbb{R}$

Esercizio 5.

Mostra degli esempi di disequazioni che abbiano come soluzione

a) $S = [1, +\infty[$
b) $S =]-\infty, 0[$
c) $S = \mathbb{R}$
d) $S = \emptyset$
e) $S = \{5\}$

Esercizio 6.

Stabilisci, motivando, se i numeri seguenti sono soluzione della disequazione $\frac{2x-3}{x} \geq 1$

a) 1
b) 0
c) 3
d) 5

Soluzioni.

$a)$ *no, per 2ª condizione;* $b)$ *no, per 1ª condizione;* $c)$ *sì;* $d)$ *sì*

Esercizio 7.

Risolvi le seguenti equazioni lineari *indicando esplicitamente* i principi di equivalenza utilizzati.

a) $3x - 1 < x + 5$
b) $x - 6 \geq 5x + 9$
c) $\frac{x}{3} > \frac{x}{2} + 1$

Esercizio 8.

Risolvi le seguenti disequazioni intere di primo grado.

1) $4(x-2) - 3(1-x) < 1 - (x-2)$

2) $x \geq 2x$

3) $(2x+1)^2 < 6 + (2x-1)^2 - 3(1-2x)$

4) $(2x-3)^2 < 4x^2$

5) $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 > (x+2)^2$

6) $\frac{2-\frac{1}{3}x}{5} - \frac{1-\frac{2}{3}x}{4} < 2 - \frac{\frac{1}{2}x - 3x}{10}$

7) $(x-4)(2x-1) + (1-2x)^2 > (6x-1)(x+3) - 7$

8) $\frac{3}{2}x + \frac{2}{3} > \frac{1}{4}x - 1$

9) $\frac{2x-1}{2} - \frac{x+1}{3} \geq 1$

10) $\frac{3}{2}(x-2) + \frac{2}{3}(3-2x) \leq \frac{x+1}{9} - 1$

11) $\frac{(3x-1)^2}{6} - \frac{(1+x)^2}{3} < \frac{(5x-1)x}{6} + \frac{(x-1)^2}{3}$

12) $\frac{x-3}{3} - \frac{x(x+4)}{2} > \frac{1-2x^2}{4} + \frac{5}{6}$

Soluzioni.

1) $S: x < \frac{7}{4}$	*2)* $S: x \geq 0$	*3)* $S: x < \frac{3}{2}$	*4)* $S: x > \frac{3}{4}$
5) $S: x > -1$	*6)* $S: x > -9$	*7)* $S: x < \frac{1}{2}$	*8)* $S: x > -\frac{4}{3}$
9) $S: x \geq \frac{11}{4}$	*10)* $S: x \leq 2$	*11)* $S: x > -\frac{3}{5}$	*12)* $S: x < -\frac{5}{4}$

Esercizio 9.

Risolvi, al variare del parametro $b \in \mathbb{R}$, le disequazioni

$$a)\ 0 \cdot x > b$$
$$b)\ 0 \cdot x \leq b$$

Soluzioni.

$a)\ se\ b \geq 0 \Longrightarrow S = \emptyset; se\ b < 0 \Longrightarrow S = \mathbb{R}$

$b)\ se\ b \geq 0 \Longrightarrow S = \mathbb{R}; se\ b < 0 \Longrightarrow S = \emptyset$

Esercizio 10.

Risolvi, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, le disequazioni

$$a)\ a \cdot x > 1$$
$$b)\ a \cdot x \leq a$$

Soluzioni.

$a)\ se\ a = 0 \Longrightarrow S = \emptyset; se\ a < 0 \Longrightarrow S = \left]-\infty, \frac{1}{a}\right[; se\ a > 0 \Longrightarrow S = \left]\frac{1}{a}, +\infty\right[$

$b)\ se\ a = 0 \Longrightarrow S = \mathbb{R}; se\ a < 0 \Longrightarrow S = [1, +\infty[; se\ a > 0 \Longrightarrow S = [-\infty, 1[$

Esercizio 11.

Studia il segno dei seguenti polinomi di primo grado.

$$a)\ -x$$
$$b)\ 3 - x$$
$$c)\ \frac{x}{3} - \frac{1}{4}$$

Soluzioni.

	$P(x) > 0$	$P(x) < 0$	$P(x) = 0$
$a)$	$x < 0$	$x > 0$	$x = 0$
$b)$	$x < 3$	$x > 3$	$x = 3$
$c)$	$x > \frac{3}{4}$	$x < \frac{3}{4}$	$x = \frac{3}{4}$

Esercizio 12.

Studia il segno dei seguenti polinomi di secondo grado, riconducendoti allo studio di un quadrato.

$$1)\ (3 - 2x)^2$$
$$2)\ 9x^2 - 6x + 1$$
$$3)\ -x^2 + 10x - 25$$

$$4) -2x^2-4x-2$$

Soluzioni.

	$P(x)>0$	$P(x)<0$	$P(x)=0$
1)	$x\neq\frac{3}{2}$	$\nexists x\in\mathbb{R}$	$x=\frac{3}{2}$
2)	$x\neq\frac{1}{3}$	$\nexists x\in\mathbb{R}$	$x=\frac{1}{3}$
3)	$\nexists x\in\mathbb{R}$	$x\neq 5$	$x=5$
4)	$\nexists x\in\mathbb{R}$	$x\neq 1$	$x=1$

Esercizio 13.

Trova la soluzione delle seguenti disequazioni

$$a)\ x^2+(x-7)^4>0$$
$$b)\ x^2+(x^2-7x)^4\leq 0$$

Soluzioni.

$a)\ S=\mathbb{R}$ $\quad b)\ S=\{0\}$

Esercizio 14.

Studia il segno dei seguenti polinomi di grado superiore al primo.

1) $x(x-3)$
2) $81-x^2$
3) x^2+4
4) $-x^2-9$
5) x^2+x-20
6) $2x^2-7x+3$
7) x^3-4x
8) x^3+9x^2
9) x^3-4x^2+4x

Soluzioni.

	$P(x)>0$	$P(x)<0$	$P(x)=0$
1)	$x<0 \vee x>3$	$0<x<3$	$x=0\vee x=3$
2)	$-9<x<9$	$x<-9\vee x>9$	$x=-9\vee x=9$
3)	$\forall x\in\mathbb{R}$	$\nexists x\in\mathbb{R}$	$\nexists x\in\mathbb{R}$
4)	$\nexists x\in\mathbb{R}$	$\forall x\in\mathbb{R}$	$\nexists x\in\mathbb{R}$
5)	$x<-5\vee x>4$	$-5<x<4$	$x=-5\vee x=4$
6)	$x<\frac{1}{2}\vee x>3$	$\frac{1}{2}<x<3$	$x=\frac{1}{2}\vee x=3$
7)	$-2<x<0\vee x>2$	$x<-2\vee 0<x<2$	$x=-2\vee x=0\vee x=2$
8)	$-9<x<0\vee x>0$	$x<-9$	$x=0\vee x=-9$
9)	$0<x<2\vee x>2$	$x<0$	$x=0\vee x=2$

Esercizio 15.

Risolvi le seguenti disequazioni di grado superiore al primo.

1) $9 < x^2$
2) $x^2 \leq x$
3) $x^2 + x > 2$
4) $x^2 + 9 > 6x$
5) $x^2 \leq 2x - 1$
6) $x^3 > 4x(x-1)$
7) $x(x-3)(2x+1) > 0$
9) $(x-1)^2(x-2)^2 \leq 0$
8) $2x^3 + x > 0$
10) $x^5 + x^3 \leq 0$
11) $16x^2 > 1$
12) $-2x(x-1) \leq 0$

Soluzioni.

1) $S: x < -3 \vee x > 3$ *2)* $S: 0 \leq x \leq 1$ *3)* $S: x < -2 \vee x > 1$ *4)* $S: x \neq 3$
5) $S: x = 1$ *6)* $S: 0 < x < 2 \vee x > 2$ *7)* $S: -\frac{1}{2} < x < 0 \vee x > 3$ *8)* $S: x > 0$
9) $S: x = 1 \vee x = 2$ *10)* $S: x \leq 0$ *11)* $S: x < -\frac{1}{4} \vee x > \frac{1}{4}$ *12)* $S: x \leq 0 \vee x \geq 1$

Esercizio 16.
Studia, in funzione della variabile x, il segno delle seguenti frazioni.
1) $\frac{1}{x-5}$
2) $\frac{x^2+1}{x-5}$
3) $\frac{2x^2+3}{x^2-4}$
4) $\frac{3}{(x-3)^2}$
5) $\frac{-2}{x^2-2x+1}$
6) $\frac{7}{-x^2+4x-4}$

Soluzioni.

	non definita	$\frac{N}{D} > 0$	$\frac{N}{D} < 0$	$\frac{N}{D} = 0$
1)	$x = 5$	$x > 5$	$x < 5$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
2)	$x = 5$	$x > 5$	$x < 5$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
3)	$x = -2 \vee x = 2$	$x < -2 \vee x > 2$	$-2 < x < 2$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
4)	$x = 3$	$x \neq 3$	$\nexists x \in \mathbb{R}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
5)	$x = 1$	$\nexists x \in \mathbb{R}$	$x \neq 1$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
6)	$x = 2$	$\nexists x \in \mathbb{R}$	$x \neq 2$	$\nexists x \in \mathbb{R}$

Esercizio 17.
Studia, in funzione della variabile x, il segno delle seguenti frazioni.
1) $\frac{1-x}{x+2}$
2) $\frac{1-x}{1+x^2}$

3) $\frac{x^2-9}{x+4}$
4) $\frac{(x-1)^2}{x}$
5) $\frac{x^2-5x}{x^2-4x-5}$
6) $\frac{x^3-x}{2x^2-4x+2}$

Soluzioni.

	non definita	$\frac{N}{D}>0$	$\frac{N}{D}<0$	$\frac{N}{D}=0$
1)	$x=-2$	$-2<x<1$	$x<-2 \vee x>1$	$x=1$
2)	$\nexists x \in \mathbb{R}$	$x<1$	$x>1$	$x=1$
3)	$x=-4$	$x<-3 \vee x>3$	$-3<x<3$	$x=-3 \vee x=3$
4)	$x=0$	$x>0 \wedge x \neq 1$	$x<0$	$x=1$
5)	$x=-1 \vee x=5$	$x<-1 \vee 0<x<5 \vee x>5$	$-1<x<0$	$x=0$
6)	$x=-1 \vee x=0 \vee x=1$	$-1<x<0 \vee x>1$	$x<-1 \vee 0<x<1$	$x=-1 \vee x=0$

Esercizio 18.
Risolvi le seguenti disequazioni algebriche fratte.

1) $\frac{5}{3x} \leq 0$ *2)* $\frac{x^2+9}{x^2+3} \leq 0$
3) $\frac{x}{3-x} \geq 0$ *4)* $\frac{-x(x-2)}{x-3} > 0$
5) $\frac{x^2-4}{x-2} \leq 0$ *6)* $\frac{x+5}{7-x} \geq 0$
7) $\frac{1-x^2}{x^2-x+12} < 0$ *8)* $\frac{x^2-3x}{x^2-2x+1} < 0$
9) $\frac{1}{2x}+1 \geq 0$ *10)* $\frac{1}{2x-1} < \frac{1}{3}$
11) $\frac{x+1}{x-1} \leq 2$ *12)* $\frac{2}{x-1} > \frac{x}{1-x}-1$
13) $x \geq \frac{x^2}{x-1}$ *14)* $\frac{x+1}{x-1}+3-\frac{1-3x}{1-x} \leq 0$
15) $\frac{x^2-4}{3x}-\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}-\frac{2}{x}$ *16)* $\frac{x-2}{x^2-4}-\frac{1}{x+2} \leq \frac{2-x}{x^2+4x+4}$

Soluzioni.
1) $S: x<-3 \vee x>3$ *2)* $S: 0 \leq x \leq 1$ *3)* $S: x<-2 \vee x>1$ *4)* $S: x \neq 3$
5) $S: x=1$ *6)* $S: 0<x<2 \vee x>2$ *7)* $S: -\frac{1}{2}<x<0 \vee x>3$ *8)* $S: x>0$
9) $S: x<-\frac{1}{2} \vee x>0$ *10)* $S: x<\frac{1}{2} \vee x>2$ *11)* $S: x<1 \vee x \geq 3$ *12)* $S: x<-\frac{1}{2} \vee x>1$
13) $S: 0 \leq x<1$ *14)* $S=\emptyset$ *15)* $S: x \leq -\frac{1}{2} \vee 0<x \leq 2$ *16)* $S: x<0 \wedge x \neq -2$

Esercizio 19.
Trova un sistema di disequazioni che abbia per soluzione i seguenti insiemi.
$a)$ $S=\emptyset$
$b)$ $S=\mathbb{R}$
$c)$ $S=]1,3]$

$d)\ S =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$
$e)\ S = \{3\}$

Esercizio 20.
Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

1) $\begin{cases} x > 1 \\ x \leq 3 \end{cases}$ *2)* $\begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq 5 \end{cases}$ *3)* $\begin{cases} x < 5 \\ x \leq 7 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 1 < x \leq 7 \\ x > 6 \end{cases}$ *5)* $\begin{cases} x < 0 \vee x \geq 6 \\ x \leq 7 \end{cases}$ *6)* $\begin{cases} x \leq 3 \vee 5 \leq x < 8 \\ x \leq 5 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x \leq x \\ x \geq x \end{cases}$ *8)* $\begin{cases} x < 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ *9)* $\begin{cases} x < 0 \\ x < 0 \end{cases}$

Soluzioni.
1) $S =]1,3]$ *2)* $S = \{5\}$ *3)* $S =]-\infty, 5[$
4) $S =]6,7]$ *5)* $S =]-\infty, 0[\cup [6,7]$ *6)* $S =]-\infty, 3] \cup \{5\}$
7) $S = \mathbb{R}$ *8)* $S = \emptyset$ *9)* $S =]-\infty, 0[$

Esercizio 21.
Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

1) $\begin{cases} 3x - 2 > 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases}$ *2)* $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{x}{4} < \frac{2x+1}{8} \\ \frac{x-1}{4} \leq 1 \end{cases}$ *3)* $\begin{cases} 3x + 7 \geq \frac{7}{2}x + 9 \\ 3(x+6) + x(x-1) \geq 18 + (x-2)(x+2) + x \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{x+2}{x-1} \geq 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases}$ *5)* $\begin{cases} x^2 < x + 6 \\ \frac{1-x}{5+2x} > 0 \end{cases}$ *6)* $\begin{cases} \frac{x}{x} \geq 0 \\ x \leq 5 + x \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{x-1}{x} > 3 \\ \frac{1}{x-1} + 2 > \frac{3+x}{3x-3} \end{cases}$ *8)* $\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} > \frac{3}{4} \\ x^2 \leq 4 \end{cases}$ *9)* $\begin{cases} x^2(x+3) \geq 0 \\ x^2 > 2x - 1 \end{cases}$

Soluzioni.
1) $S = \left]\frac{2}{3}, 1\right]$ *2)* $S = \left]-\frac{3}{4}, 5\right]$ *3)* $S = \{-4\}$
4) $S: -3 < x \leq -2 \vee x > 1$ *5)* $S =]-2,1[$ *6)* $S: x \neq 0$
7) $S = \left]-\frac{1}{2}, 0\right[$ *8)* $S =]1,2]$ *9)* $S =]-3,0[\cup]0,1[\cup]1, +\infty[$

3. Algebra di secondo grado

La scomposizione

Un generico polinomio di secondo grado, detto anche polinomio quadratico, si può scrivere come

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

dove a, b e c sono numeri reali e $a \neq 0$.

Richiediamo che $a \neq 0$ perché, se a fosse nullo, il polinomio sarebbe del tipo $P(x) = bx + c$ che ha grado minore di 2.

In generale, quindi, un polinomio di secondo grado è costituito da

- ax^2 detto *termine quadratico*
- bx detto *termine lineare*
- c detto *termine noto*

L'unico termine che deve necessariamente comparire affinchè un polinomio sia di secondo grado è quello quadratico ax^2: il termine lineare e il termine noto possono mancare.

In questo caso polinomio viene detto *incompleto.*

- Se $b = 0 \Longrightarrow P(x) = ax^2 + c$
- Se $c = 0 \Longrightarrow P(x) = ax^2 + bx$
- Se $b = c = 0 \Longrightarrow P(x) = ax^2$

Esempio.

$\boldsymbol{P(x)}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$

$2x^2+3x+1$	2	3	1
x^2-x+6	1	-1	6
$3x^2-2x$	3	-2	0
x^2-3	1	0	-3

Lo scopo di questo primo capitolo è scoprire sotto quali condizioni - e come - un polinomio quadratico può essere scomposto in fattori.

Il motivo è che se disponiamo di una scomposizione in fattori del polinomio allora è possibile risolvere ogni equazione e disequazione di secondo grado.

Il teorema fondamentale di scomposizione risponde in modo completo a questa questione: di più, vedremo che ci consentirà di sapere se una equazione di secondo grado ha soluzione e, in questo caso, ci fornirà una formula risolutiva.

Ci permetterà infine di dare un procedimento per risolvere le disequazioni di secondo grado.

3.1. Monomio quadratico elementare $P(x) = ax^2$

Il monomio

$$P(x) = ax^2, a \in \mathbb{R}$$

è detto *monomio quadratico elementare.*

Osserviamo che è una espressione già scomposta in fattori, e sappiamo già risolvere l'equazione e le disequazioni associate

$$ax^2 = 0$$

$$ax^2 \lesseqgtr 0$$

Esempio 1.
Risolviamo l'equazione

$$3x^2 = 0$$

Dividendo ambo i membri per 3 otteniamo $x^2 = 0$, da cui $x = 0$. Quindi $S = \{0\}$.

Esempio 2.
Risolviamo

$$0 \cdot x^2 = 0$$

L'equazione è verificata per ogni valore che assume x, quindi $S = \mathbb{R}$.

Esempio 3.
Troviamo la soluzione di

$$-5x^2 < 0$$

Possiamo dividere i due membri per -5, invertendo l'ordine della disuguaglianza: otteniamo così

$$x^2 > 0$$

che è verificata se $x \neq 0$; pertanto $S =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Esercizi.
Risolvi le seguenti equazioni e disequazioni associate a monomi quadratici elementari.

1) $4x^2 = 0$ 2) $-x^2 = 0$ 3) $7x^2 < 0$

4) $-6x^2 \leq 0$ 5) $2x^2 \leq 0$ 6) $-8x^2 > 0$

Soluzioni.
1) $S = \{0\}$ 2) $S = \{0\}$ 3) $S = \emptyset$ 4) $S = \mathbb{R}$ 5) $S = \{0\}$ 6) $S = \emptyset$

2.3 Polinomi incompleti del tipo $P(x) = a(x^2 \pm k)$

Dal polinomio generico di secondo grado $P(x) = ax^2 + bx + c$ otteniamo, se $b = 0$, la famiglia di polinomi quadratici

$$P(x) = ax^2 + c, \quad a, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, c \neq 0$$

e raccogliendo il coefficiente a a fattor comune

$$ax^2 + c = a\left(x^2 + \frac{c}{a}\right)$$

Ora, posto $\frac{c}{a} = \pm k$, con $k > 0$ a seconda del segno di $\frac{c}{a}$, possiamo esprimere il polinomio come

$$P(x) = a(x^2 \pm k), \quad k > 0$$

I polinomi di questo tipo non sono sempre scomponibili in fattori: vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.
Consideriamo il polinomio quadratico

$$9x^2 - 4$$

È evidentemente scomponibile in fattori (è una differenza di quadrati): risulta così

$$(3x + 2)(3x - 2)$$

Procedendo come negli esempi precedenti siamo quindi in grado di risolvere l'equazione associata

$$9x^2 - 4 = 0$$

applicando la legge di annullamento del prodotto a

$$(3x + 2)(3x - 2) = 0$$

Otteniamo così $S = \left\{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$.

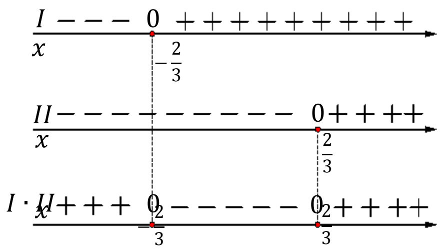
Sappiamo anche risolvere le disequazioni associate, ad esempio

$$(3x+2)(3x-2)<0$$

Studiando il segni dei fattori e confrontandoli otteniamo

$\boxed{x: I>0} \Longrightarrow 3x+2>0 \Longrightarrow \boxed{x>-\frac{2}{3}}$

$\boxed{x: II>0} \Longrightarrow 3x-2>0 \Longrightarrow \boxed{x>\frac{2}{3}}$



da cui $S=\left]-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right[$.

Esempio 2.
Consideriamo il polinomio

$$4x^2+1$$

che è eventualmente riconducibile alla forma $a(x^2 \pm k)$ raccogliendo 4.

Vogliamo mostrare che non è scomponibile in fattori.

Osserviamo anzitutto che si tratta di una quantità positiva per ogni valore di x, ovvero

$$4x^2+1>0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

essendo costituita dalla una somma fra $4x^2$ (sempre positiva o zero) e 1, che è un numero positivo.

Supponiamo *per assurdo* che $4x^2+1$ sia scomponibile in fattori: questo significa che esistono due polinomi di primo grado $Q(x)$ e $T(x)$ tali che

$$4x^2+1=Q(x)\cdot T(x)$$

Ma questo è impossibile, perché esiste sempre un valore di x che annulla $Q(x)$ e $T(x)$ mentre, come abbiamo visto, $4x^2+1$ non è mai zero per alcun valore di x.

Siamo comunque in grado di trovare la soluzione dell'equazione e delle disequazioni associate, grazie alla positività del polinomio.

Ad esempio

- $4x^2+1=0 \Longrightarrow S: \nexists x \in \mathbb{R}$
- $4x^2+1>0 \Longrightarrow S: \forall x \in \mathbb{R}$
- $4x^2+1<0 \Longrightarrow S: \nexists x \in \mathbb{R}$

Discorsi analoghi a quelli fatti sinora li possiamo applicare alla classe più ampia dei polinomi quadratici della forma

$$a(Q(x)^2 \pm k), \qquad k>0$$

dove $Q(x)$ è un polinomio lineare.

Esempio 3.
Consideriamo il polinomio di secondo grado

$$9(x-5)^2-4$$

Anche in questo caso il polinomio è riconducibile alla forma precedente raccogliendo 9 a fattor comune.

È una differenza di quadrati, dunque scomponibile in fattori: in particolare

$$[3(x-5)+2][3(x-5)-2]$$

ovvero

$$(3x-13)(3x-17)$$

Siamo quindi in grado di risolvere l'equazione associata

$$9(x-5)^2-4=0$$

Dalla scomposizione in fattori

$$(3x-13)(3x-17)=0$$

ne viene $S=\left\{\frac{13}{3},\frac{17}{3}\right\}$.

Come abbiamo visto negli esempi precedenti possiamo risolvere anche le disequazioni associate.

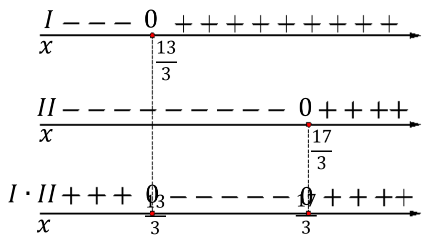
Ad esempio, per risolvere

$$(3x-13)(3x-17)>0$$

studiamo i segni dei fattori

$\boxed{x: I>0} \Longrightarrow 3x-13>0 \Longrightarrow \boxed{x>\frac{13}{3}}$

$\boxed{x: II>0} \Longrightarrow 3x-17>0 \Longrightarrow \boxed{x>\frac{17}{3}}$



da cui $S: x<\frac{13}{3} \vee x>\frac{17}{3}$.

Esempio 4.
Consideriamo il polinomio di secondo grado

$$4(x-1)^2+9$$

Visto che $4(x-1)^2$ è positivo o nullo per ogni valore di x ed è sommato a 9 ne viene che

$$4(x-1)^2+9>0\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Quindi, utilizzando considerazioni analoghe a quelle fatte nell'*Esempio 2,* non è scomponibile in fattori.

Grazie alla sua positività possiamo comunque risolvere l'equazione e le disequazioni associate

- $4(x-1)^2+9=0 \Longrightarrow S: \nexists x \in \mathbb{R}$
- $4(x-1)^2+9>0 \Longrightarrow S: \forall x \in \mathbb{R}$
- $4(x-1)^2+9<0 \Longrightarrow S: \nexists x \in \mathbb{R}$

Riassumendo

Sia $Q(x)$ un polinomio di primo grado e $a, k > 0$.
Allora

- $a(Q(x)^2 - k)$ è scomponibile in fattori come differenza di quadrati
- $a(Q(x)^2 + k)$ è irriducibile e $a[Q(x)]^2 + k > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

Esercizio.
Scomponi in fattori, se è possibile, i seguenti. Risolvi infine le disequazioni indicate.

$\boldsymbol{P(x)}$	***scomposizione***	$\boldsymbol{P(x)=0}$	$\boldsymbol{P(x)<0}$	$\boldsymbol{P(x)>0}$
$4x^2+1$				
$4x^2-1$				
$-4x^2-1$				
$16(2x-1)^2-9$				
$16(2x-1)^2+9$				
$-16(2x-1)^2+9$				

Soluzione.

$\boldsymbol{P(x)}$	***scomposizione***	$\boldsymbol{P(x)=0}$	$\boldsymbol{P(x)<0}$	$\boldsymbol{P(x)>0}$
$4x^2+1$	*irriducibile*	$\nexists x \in \mathbb{R}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$4x^2-1$	$(2x+1)(2x-1)$	$S=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$	$S=\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$	$S:< -\frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{2}$
$-4x^2-1$	*irriducibile*	$\nexists x \in \mathbb{R}$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
$16(2x-1)^2-9$	$(8x-1)(8x-7)$	$S=\left\{\frac{1}{8},\frac{7}{8}\right\}$	$S=\left]\frac{1}{8},\frac{7}{8}\right[$	$S: x<\frac{1}{8} \vee x>\frac{7}{8}$
$16(2x-1)^2+9$	*irriducibile*	$\nexists x \in \mathbb{R}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$-16(2x-1)^2+9$	$-(8x-1)(8x-7)$	$S=\left\{\frac{1}{8},\frac{7}{8}\right\}$	$S: x<\frac{1}{8} \vee x>\frac{7}{8}$	$S=\left]\frac{1}{8},\frac{7}{8}\right[$

3.3 Polinomi completi

È dato un polinomio di secondo grado *completo*

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

dove a, b, c sono numeri reali non nulli.

Con le conoscenze attuali siamo in grado di scomporre in fattori particolari polinomi di questo tipo: possiamo riconoscere se sono quadrati di binomi o trinomi speciali; possiamo inoltre vedere se sono scomponibili col metodo di Ruffini.

Tuttavia non sempre questi metodi sono comodi: inoltre, se le procedure che abbiamo a disposizione non si rivelano efficaci, non sappiamo se effettivamente il polinomio è irriducibile o se semplicemente non abbiamo gli strumenti per scomporlo.

Infine, a meno di alcuni polinomi particolari, non sappiamo stabilirne il segno.

Per questi motivi vedremo come esprimere *ogni* polinomio quadratico nella forma che abbiamo visto in precedenza

$$a(Q(x)^2 \pm k), \qquad k \geq 0$$

dove $Q(x)$ è un polinomio di primo grado.

Arrivati a questo punto sappiamo sotto quali condizioni il polinomio è scomponibile e, in ogni caso, siamo in grado di stabilirne il segno, potendo risolvere in questo modo l'equazione e le disequazioni di secondo grado associate.

A tal scopo, descriviamo il seguente metodo, detto di *completamento al quadrato.*

Metodo di completamento al quadrato

Dato un polinomio di secondo grado del tipo

$$ax^2 + bx$$

il metodo del completamento al quadrato ci consentirà, come vedremo, di esprimerlo nella forma

$$a(Q(x)^2 \pm k), \;\; k \geq 0$$

Senza perdere di generalità possiamo considerare solo il caso in cui $a = 1$, ovvero i polinomi del tipo

$$x^2 + bx$$

Mettiamo anzitutto in evidenza il fattore 2 nel monomio bx

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x$$

A questo punto osserviamo che aggiungendo – *completando* – il binomio con il termine $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ otteniamo lo sviluppo di un quadrato di un binomio: infatti

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Ma, se *desideriamo* aggiungere $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ a $x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x$ per completarlo al quadrato, *dobbiamo* aggiungere il termine $-\left(\frac{b}{2}\right)^2$ per non alterare il valore dell'espressione.

Quindi

$$x^2 + bx = x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x = \underbrace{x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2}_{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

In definitiva

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.
Completiamo al quadrato il polinomio $P(x) = x^2 - 3x$.

Mettiamo anzitutto in evidenza 2 nel termine lineare

$$x^2 - 3x = x^2 - 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)x$$

A questo punto aggiungiamo e togliamo $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ e otteniamo così

$$\underbrace{x^2 - 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)x + \frac{9}{4}}_{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2} - \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

In definitiva

$$x^2 - 3x = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

Esempio 2.
Completiamo al quadrato il polinomio $P(x) = x^2 + x$.

Mettiamo in evidenza 2 nel termine lineare

$$x^2 + x = x^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)x$$

A questo punto aggiungiamo e togliamo $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ e otteniamo così

$$\underbrace{x^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)x + \frac{1}{4}}_{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Quindi

$$x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Esempio 3.
Completiamo al quadrato il polinomio $P(x) = 5x^2 - 2x$.

In questo caso, diversamente dagli esempi precedenti, $a = 5$.

Possiamo ricondurci ai casi trattati raccogliendo il fattore 5, ottenendo così

$$5x^2 - 2x = 5\left(x^2 - \frac{2}{5}x\right)$$

Ora completiamo al quadrato $x^2 - \frac{2}{5}x$.

$$x^2 - \frac{2}{5}x = x^2 - 2\left(\frac{1}{5}\right)x + \left(\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{25} = \left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{25}$$

da cui

$$P(x) = 5x^2 - 2x = 5\left[\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{25}\right]$$

A questo punto esprimere un polinomio completo $P(x) = ax^2 + bx + c$ nella forma

$$a(Q(x)^2 \pm k), \quad k \geq 0$$

è quasi immediato: è sufficiente completare al quadrato $ax^2 + bx$ e sostituire il completamento nell'espressione di $P(x)$.

Inoltre, se il polinomio è del tipo $a(Q(x)^2 - k)$, è scomponibile nei fattori

$$a\left(Q(x) + \sqrt{k}\right)\left(Q(x) - \sqrt{k}\right)$$

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.
È dato il polinomio $P(x) = x^2 + x + 1$.

Completiamo al quadrato $x^2 + x$: abbiamo visto in precedenza che $x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, quindi

$$P(x) = x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

In definitiva

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

che è della forma cercata.

Esempio 2.
È dato il polinomio $P(x) = x^2 + x - 6$.

Sfruttiamo l'esercizio precedente: da $x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ ne viene

$$x^2 + x - 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

pertanto

$$x^2 + x - 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

Il polinomio è ulteriormente scomponibile in fattori

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = \left(x + \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right) = (x + 3)(x - 2)$$

In definitiva

$$P(x) = x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$$

Esempio 3.
È dato il polinomio $P(x) = 2x^2 + x - 6$.

Raccogliamo preventivamente $a = 2$ a fattor comune

$$P(x) = 2\left(x^2 + \frac{1}{2}x - 3\right)$$

Completiamo al quadrato $x^2 + \frac{1}{2}x$.

$$x^2 + \frac{1}{2}x = \underbrace{x^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)x + \frac{1}{16}}_{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2} - \frac{1}{16} = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$$

Quindi

$$2\left(x^2 + \frac{1}{2}x - 3\right) = 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - 3\right] = 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right]$$

L'espressione nella parentesi quadra è una differenza di quadrati: scomponendo in fattori

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} = \left(x + \frac{1}{4} + \frac{7}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4} - \frac{7}{4}\right) = (x + 2)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

In definitiva

$$P(x) = 2x^2 + x - 6 = 2(x + 2)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Schema riassuntivo

Per esprimere un polinomio quadratico $P(x) = ax^2 + bx + c$ come $a(Q(x)^2 \pm k)$, dove $Q(x)$ è un polinomio di primo grado e $k \geq 0$ dobbiamo

- raccogliere il coefficiente a, ottenendo $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$
- completare al quadrato $x^2 + \frac{b}{a}x$
- sostituire il completamento nell'espressione precedente

Infine

- se l'espressione ottenuta è del tipo
$$a(Q(x)^2 - k)$$
si può scomporre nei fattori
$$a\left(Q(x) + \sqrt{k}\right)\left(Q(x) - \sqrt{k}\right)$$
- se l'espressione ottenuta è del tipo $a(Q(x)^2 + k)$ il polinomio è irriducibile.

Esercizio.
Esprimi i seguenti polinomi quadratici nella forma $a(Q(x)^2 \pm k)$ e, se possibile, scomponili in fattori. Risolvi infine l'equazione e le disequazioni indicate.

$\boldsymbol{P(x)}$	$\boldsymbol{a(Q(x)^2 \pm k)}$	***scomposizione***	$\boldsymbol{P(x) = 0}$	$\boldsymbol{P(x) < 0}$	$\boldsymbol{P(x) > 0}$
$2x^2 + 5x - 3$					
$12x^2 + x - 1$					
$-9x^2 + 6x - 82$					
$18x^2 - 12x + 2$					
$3x^2 - x - 2$					
$9x^2 - 6x + 10$					

Soluzione.

$\boldsymbol{P(x)}$	$\boldsymbol{a(Q(x)^2 \pm k)}$	***scomposizione***	$\boldsymbol{P(x) = 0}$	$\boldsymbol{P(x) < 0}$	$\boldsymbol{P(x) > 0}$
$2x^2 + 5x - 3$	$2\left[\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right]$	$2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3)$	$S = \left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$	$S = \left]-3, \frac{1}{2}\right[$	$S: < -3 \vee x > \frac{1}{2}$
$12x^2 + x - 1$	$12\left[\left(x + \frac{1}{24}\right)^2 - \frac{49}{576}\right]$	$12\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right)$	$S = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$	$S = \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right[$	$S: < -\frac{1}{3} \vee x > \frac{1}{4}$
$-9x^2 + 6x - 82$	$-9\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 9\right]$	*irriducibile*	$\nexists x \in \mathbb{R}$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
$18x^2 - 12x + 2$	$18\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$	$18\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$	$S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$	$S: x \neq \frac{1}{3}$
$3x^2 - x - 2$	$3\left[\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right]$	$3(x - 1)\left(x + \frac{2}{3}\right)$	$S = \left\{-\frac{2}{3}, 1\right\}$	$S = \left]-\frac{2}{3}, 1\right[$	$S: < -\frac{2}{3} \vee x > 1$

$9x^2-6x+10$	$9\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+1\right]$	*irriducibile*	$\nexists x\in\mathbb{R}$	$\nexists x\in\mathbb{R}$	$\forall x\in\mathbb{R}$

1.5. Teorema fondamentale della scomposizione

Diamo ora il seguente teorema che generalizza i procedimenti visti sinora: come vedremo, ci permetterà di ottenere una formula risolutiva per le equazioni di secondo grado e fornirà un procedimento risolutivo per le disequazioni di secondo grado.

Teorema (fondamentale di scomposizione).
È dato il polinomio di secondo grado

$$P(x)=ax^2+bx+c,\quad a,b,c\in\mathbb{R},\quad a\neq 0$$

Chiamiamo l'espressione $\Delta=b^2-4ac$ *discriminante.*

Allora

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

da cui possiamo dedurre che

- se $\Delta<0$ il polinomio è irriducibile; posto $k=-\frac{\Delta}{4a^2}>0$ si può esprimere come

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+k\right],\qquad k>0$$

- se $\Delta=0$ il polinomio è lo sviluppo del quadrato di un binomio (o l'opposto di un quadrato) e si può scrivere come

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2$$

- se $\Delta > 0$ il polinomio è scomponibile in fattori: in particolare

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

dove

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Dimostrazione.
Per provare questo risultato è sufficiente applicare al polinomio generico $ax^2 + bx + c$ i procedimenti visti nelle sezioni precedenti.

$$P(x) = ax^2 + bx + c =$$ raccogliamo a a fattor comune

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$ vogliamo completare al quadrato $x^2 + \frac{b}{a}x$, quindi mettiamo in evidenza il fattore 2 nel termine $\frac{b}{a}x$

$$a\left(x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \frac{c}{a}\right) =$$ aggiungiamo e togliamo $\frac{b^2}{4a^2}$,

$$a\left[x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] =$$ visto che $x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \frac{b^2}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] =$$ ricordando che $\Delta = b^2 - 4ac$

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

In definitiva abbiamo mostrato che

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Ora

- se $\Delta < 0$ allora $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$; posto $k = -\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ e

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + k\right]$$

Il polinomio è pertanto irriducibile perché, come abbiamo visto, il contenuto della parentesi quadra è la somma di un quadrato e di un numero positivo.

- se $\Delta = 0$ l'espressione diventa

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

come desideravamo provare.

Osserviamo che, se $a > 0$ possiamo scrivere $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2$ e il polinomio è esattamente il quadrato di un binomio.

Altrimenti, se $a < 0$ risulta $a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = -(-a)\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = -\left(\sqrt{-a}x + \frac{b}{2\sqrt{-a}}\right)^2$ e il polinomio è l'opposto di un quadrato.

- se $\Delta > 0$ l'espressione $\frac{\Delta}{4a^2}$ è positiva e $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ è una differenza di quadrati

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

e, svolgendo i calcoli

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

A questo punto, posto $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ otteniamo

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

come volevamo dimostrare.

La dimostrazione è così terminata.

Si possono indicare x_1 e x_2 utilizzando un'unica formula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ovvero

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Osservazione.
La formula $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, ottenuta per $\Delta > 0$, è valida anche se $\Delta = 0$.

Infatti, in questo caso

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b \pm 0}{2a} = -\frac{b}{2a}$$

Dunque $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ e

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

che è l'espressione ottenuta nel teorema per $\Delta = 0$.

Riassumendo

Scomposizione di un polinomio di secondo grado

Il polinomio quadratico

$$ax^2 + bx + c$$

è scomponibile in fattori se il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

In questo caso

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

dove x_1 e x_2 sono ottenuti dalla formula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Se il discriminante $\Delta < 0$ il polinomio è irriducibile.

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.
Stabiliamo se il polinomio $P(x) = 6x^2 + x - 2$ è scomponibile in fattori: in caso affermativo determiniamo la scomposizione.

I coefficienti sono $a = 6, b = 1$ e $c = -2$.

Per vedere se il polinomio è fattorizzabile calcoliamo il discriminante

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 1 + 48 = 49$$

Visto che $\Delta > 0$ il polinomio si può scomporre.

Determiniamo quindi x_1 e x_2.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{-1 \pm 7}{12} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-1-7}{12} = -\dfrac{2}{3} \\ x_2 = \dfrac{-1+7}{12} = \dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

Quindi

$$6x^2 + x - 2 = 6\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Abbiamo quindi scomposto in fattori il polinomio.

In questo caso si può scrivere la scomposizione in modo che contenga solo numeri interi: visto che $6 = 2 \cdot 3$

$$6\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot 3 \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

moltiplicando 3 per $\left(x + \frac{2}{3}\right)$ e 2 con $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ otteniamo

$$(3x + 2)(2x - 1)$$

In definitiva

$$6x^2 + x - 2 = (3x + 2)(2x - 1)$$

Esempio 2.

Scomponiamo in fattori, se è possibile, il polinomio $P(x) = 4x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{9}$.

In questo caso $a = 4, b = -\frac{4}{3}$ e $c = \frac{1}{9}$.

Calcoliamo il discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{16}{9} - \frac{16}{9} = 0$$

Il discriminante è nullo, quindi dal teorema di scomposizione sappiamo che il polinomio è lo sviluppo del quadrato di un binomio: da un esame diretto, infatti

$$4x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{9} = \left(2x - \frac{1}{3}\right)^2$$

Naturalmente, se osservavamo subito che il trinomio era lo sviluppo di un quadrato, potevamo evitare di calcolare il discriminante e scrivere direttamente la scomposizione.

In alternativa, poiché $\Delta \geq 0$, potevamo applicare la formula

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Troviamo x_1 e x_2

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+\frac{4}{3}\pm 0}{8}=\frac{+\frac{4}{3}}{8}=\frac{1}{6}$$

dunque

$$P(x)=4x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{9}=4\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{6}\right)=4\left(x-\frac{1}{6}\right)^2$$

Eventualmente si può portare il fattore 4 nel quadrato e ottenere l'espressione già trovata.

Esempio 3.
Scomponiamo in fattori, se è possibile, il polinomio $P(x)=x^2+x+1$.

I coefficienti sono $a=1, b=1$ e $c=1$.

Il discriminante è

$$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\cdot 1\cdot 1=-3$$

Il discriminante è negativo, pertanto il polinomio non è fattorizzabile.

Ricordiamo che in questo caso il polinomio è esprimibile come la somma fra un quadrato e un numero positivo.

Anche se non è richiesto esplicitamente, possiamo trovare questa espressione completando al quadrato x^2+x.

$$P(x)=x^2+x+1=x^2+2\left(\frac{1}{2}\right)x+1=\underbrace{x^2+2\left(\frac{1}{2}\right)x+\frac{1}{4}}_{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{1}{4}+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

mettiamo in evidenza il
2 al monomio in x

completiamo al quadrato, aggiungendo e togliendo $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

Esempio.
Semplifichiamo la frazione

$$\frac{3x^2-2x-5}{2x^2+3x+1}$$

dopo aver individuato le condizioni di esistenza.

Scomponiamo in fattori, se possibile, il numeratore e il denominatore.

Per quanto riguarda il numeratore: calcoliamo il discriminante

$$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot 3\cdot(-5)=64>0$$

Quindi è scomponibile in fattori. Calcoliamo x_1 e x_2

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm 8}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{2-8}{6} = -1 \\ x_2 = \frac{2+8}{6} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Pertanto $3x^2 - 2x - 5 = 3\left(x + \frac{5}{3}\right)(x+1) = (3x+5)(x+1)$

Procediamo allo stesso modo per il denominatore: il discriminante è

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 > 0$$

Quindi anche il denominatore è scomponibile. Calcoliamo x_1 e x_2

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm 1}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{-3-1}{4} = -1 \\ x_2 = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi $2x^2 + 3x + 1 = 2(x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x+1)(2x+1)$

La frazione da semplificare è

$$\frac{(3x+5)(x+1)}{(x+1)(2x+1)}$$

Le condizioni di esistenza sono $CE: x \neq -1 \land x \neq -\frac{1}{2}$.

Semplificando il fattore comune otteniamo infine

$$\frac{3x+5}{2x+1}$$

Esercizio 1.
Semplifica, se possibile, le seguenti frazioni algebriche dopo aver determinato le condizioni di esistenza.

a) $\frac{x^2-4}{2x^2+x-6}$ b) $\frac{x^2-2}{x^2-3\sqrt{2}x+4}$ c) $\frac{3x^2-2x-1}{3x^2+7x+2}$

Soluzione.

a) $\frac{x-2}{2x-3}$ *b)* $\frac{x+\sqrt{2}}{x-2\sqrt{2}}$ *c)* $\frac{x-1}{x+2}$

Esercizio 2.
Stabilisci, utilizzando il discriminante, se i seguenti polinomi sono scomponibili in fattori: in questo caso trova la scomposizione. Se i polinomi sono irriducibili esprimili, completando al quadrato, nella forma $a(Q(x)^2+k), k>0$.

Risolvi infine l'equazione e le disequazioni indicate.

$\boldsymbol{P(x)}$	***scomposizione o*** $\boldsymbol{a(Q(x)^2+k)}$	$\boldsymbol{P(x)=0}$	$\boldsymbol{P(x)<0}$	$\boldsymbol{P(x)>0}$
x^2+2x+3				
$6x^2-x-2$				
$3x^2-3x+\frac{3}{4}$				
x^2+2x-4				
$3x^2-x-2$				
$9x^2-6x+10$				
$6x^2+5x+1$				

Soluzione.

$\boldsymbol{P(x)}$	***scomposizione o*** $\boldsymbol{a(Q(x)^2+k)}$	$\boldsymbol{P(x)=0}$	$\boldsymbol{P(x)<0}$	$\boldsymbol{P(x)>0}$
x^2+2x+3	*irriducibile* $(x+1)^2+2$	$\nexists x\in\mathbb{R}$	$\nexists x\in\mathbb{R}$	$\forall x\in\mathbb{R}$
$6x^2-x-2$	$(3x-2)(2x+1)$	$S=\left\{\frac{2}{3},-\frac{1}{2}\right\}$	$S=\left]-\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right[$	$S:<-\frac{1}{2}\vee x>\frac{2}{3}$
$3x^2-3x+\frac{3}{4}$	$3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$	$S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$	$\nexists x\in\mathbb{R}$	$x\neq\frac{1}{2}$
x^2+2x-4	$\left(x+1+\sqrt{5}\right)\left(x+1-\sqrt{5}\right)$	S: $x=-1-\sqrt{5}\ \vee$ $x=-1+\sqrt{5}$	$S: -1-\sqrt{5}<x$ $<-1+\sqrt{5}$	S: $x<-1-\sqrt{5}\ \vee$ $x>-1+\sqrt{5}$
$3x^2-x-2$	$(x-1)(3x+2)$	$S=\left\{-\frac{2}{3},1\right\}$	$S=\left]-\frac{2}{3},1\right[$	$S:<-\frac{2}{3}\vee x>1$
$9x^2-6x+10$	*irriducibile* $9\left[\left(x-\frac{1}{9}\right)^2+1\right]$	$\nexists x\in\mathbb{R}$	$\nexists x\in\mathbb{R}$	$\forall x\in\mathbb{R}$
$6x^2+5x+1$	$(3x+1)(2x+1)$	$S=\left\{-\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right\}$	$S=\left]-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right[$	$S:<-\frac{1}{2}\vee x>-\frac{1}{3}$

3.5 Esercizi

Esercizio 1.

Risolvi le seguenti equazioni e disequazioni, scomponendo se possibile in fattori il polinomio quadratico associato.

1) $7x^2 = 0$	2) $-2x^2 = 0$	3) $3x^2 < 0$
4) $-2x^2 \leq 0$	5) $9x^2 \leq 0$	6) $-9x^2 > 0$
7) $(2x-1)^2 = 0$	8) $(2x-1)^2 < 0$	9) $(2x-1)^2 \leq 0$
10) $(2x-1)^2 > 0$	11) $(2x-1)^2 \geq 0$	12) $(2x-1)^2 < -1$
13) $(2x-1)^2 > -1$	14) $x^2 - 5x = 0$	15) $x^2 - 5x < 0$
16) $x^2 \geq 5x$	17) $x = x^2$	18) $-x^2 + x > 0$
19) $x^2 - x \geq 0$	20) $x^2 + x = 1$	21) $x^2 + x = -1$
22) $x^2 + x = -\frac{1}{4}$	23) $x^2 + x < 1$	24) $x^2 + x < -1$
25) $x^2 + x \leq -\frac{1}{4}$	26) $x^2 + x > -\frac{1}{4}$	27) $x^2 + x > 1$
28) $x^2 - 5 > 0$	29) $2x^2 + 4x \leq 18$	30) $2x^2 + 4x + 3 > 0$
31) $2x^2 + 4x + 3 < 0$	32) $3x^2 + 11\sqrt{2}x - 8 = 0$	33) $3x^2 + 11\sqrt{2}x - 8 > 0$
34) $5x^2 + 3x + 1 = 0$	35) $5x^2 + 3x + 1 < 0$	36) $5x^2 + 3x + 1 > 0$

Soluzioni.

1) $S = \{0\}$	2) $S = \{0\}$	3) $S = \emptyset$	4) $S = \mathbb{R}$	5) $S = \{0\}$	6) $S = \emptyset$
7) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$	8) $S = \emptyset$	9) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$	10) $S = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$	11) $S = \mathbb{R}$	12) $S = \emptyset$
13) $S = \mathbb{R}$	14) $S = \{0,5\}$	15) $S: 0 < x < 5$	16) $S: x \leq 0 \lor x \geq 5$	17) $S = \{0,1\}$	18) $S: 0 < x < 1$
19) $S: x \leq 0 \lor x \geq 1$	20) S: $x \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \lor x \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	21) $S = \emptyset$	22) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$	23) S: $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	24) S: $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \lor x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
25) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$	26) $S = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$	27) S: $x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \lor x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	28) $S: x < -\sqrt{5} \lor x > \sqrt{5}$	29) $S: -4 \leq x \leq 2$	30) $S = \mathbb{R}$
31) $S = \emptyset$	32) S: $x = -4\sqrt{2} \lor x = \frac{\sqrt{2}}{3}$	33) S: $x < -4\sqrt{2} \lor x > \frac{\sqrt{2}}{3}$	34) $S = \left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\}$	35) $S: x < -\frac{2}{3} \lor x > \frac{1}{2}$	36) $S: -\frac{2}{3} < x < \frac{1}{2}$

Esercizio 2.

Trova un'equazione di secondo grado tale che abbia per soluzione

a) $S = \{0,2\}$ b) $S = \{1,2\}$ c) $S = \{2\}$ d) $S = \emptyset$ e) $S = \{0\}$ f) $S = \mathbb{R}$

Esercizio 3.

Trova i valori di k in modo che l'equazione

$$4x^2 - 12x = k$$

abbia

a) una sola soluzione b) nessuna soluzione c) infinite soluzioni

Soluzioni.

a) $k = -9$ *b)* $k < -9$ *c)* $k > -9$

Esercizio 4.
Semplifica, se possibile, le seguenti frazioni algebriche dopo aver trovato le condizioni di esistenza.

1) $\frac{6x^2-7x+2}{2x^2+3x-2}$ 2) $\frac{9x^2-6x+1}{9x^2+3x-2}$ 3) $\frac{x^2-x-3-\sqrt{3}}{x^2-\sqrt{3}}$ 4) $\frac{ax^2+x-a^3-a}{x-a}$

Soluzioni.
1) $\frac{3x-2}{x+2}$ 2) $\frac{3x-1}{3x+2}$ 3) $\frac{x-\sqrt{3}-1}{x-\sqrt{3}}$ 4) $ax+1+a^2$

Le equazioni di equazioni di secondo grado

3.6 Generalità

Ogni equazione di secondo grado si può esprimere, dopo aver svolto eventualmente i calcoli e aver portato ogni termine al primo membro, nella forma

$$ax^2+bx+c=0, \qquad a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0$$

detta *forma normale* o *forma canonica.*

Affinchè si tratti di un'equazione di secondo grado il termine ax^2 deve necessariamente comparire ed è per questo che abbiamo richiesto $a\neq 0$.

Il termine lineare bx e il termine noto c, invece, possono non comparire: in questo caso si dice che l'equazione di secondo grado è *incompleta.*

- se $b=0$ e $c=0$ otteniamo

$$ax^2=0$$

  che prende il nome di equazione incompleta *monomia.*

- se $b=0$ l'equazione ha la forma

$$ax^2+c=0$$

  Questa equazione incompleta si chiama *spuria.*

- Se $c=0$ l'equazione è

$$ax^2+c=0$$

Le equazioni incomplete di questo tipo si chiamano *pure.*

3.7 Equazioni incomplete

Vediamo come risolvere le equazioni di secondo grado incomplete.

Risolvere le equazioni monomie $ax^2 = 0$ è banale: è sempre possibile dividere per a e ottenere l'equazione $x^2 = 0$ che ha come soluzione $S = \{0\}$.

Esistono equazioni di secondo grado non propriamente monomie, ma riconducibili ad esse: sono equazioni del tipo

$$aP(x)^2 = 0$$

dove $P(x)$ è un polinomio di primo grado.

Consideriamo ad esempio

$$3(2x-3)^2 = 0$$

dividendo per 3 otteniamo $(2x-3)^2 = 0$; a questo punto sappiamo che l'equazione è verificata se e solo se $2x - 3 = 0$ che, risolta, dà $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Vediamo ora come risolvere le equazioni incomplete *spurie*, ovvero le equazioni del tipo

$$ax^2 + bx = 0$$

In questo caso è sempre possibile scomporre il primo membro in fattori raccogliendo il termine comune x: otteniamo così

$$x \cdot (ax + b) = 0$$

Grazie alla legge di annullamento del prodotto sappiamo che l'uguaglianza è vera se e solo se $x = 0$ o $ax + b = 0$, ovvero se $x = 0$ o $x = -\frac{b}{a}$: quindi la soluzione è $S = \left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$.

Osserviamo esplicitamente che le equazioni di secondo grado di questo tipo *hanno sempre soluzione.*

Risoluzione equazioni spurie
Procedimento risolutivo

Per risolvere un' equazione di secondo grado incompleta spuria dobbiamo

1. portarla alla forma canonica $ax^2 + bx = 0$
2. scomporre il primo membro raccogliendo il fattore comune x
3. applicare la legge di annullamento del prodotto

Esempio.
Risolviamo la seguente equazione di secondo grado spuria

$$x^2 = x$$

Portiamo il termine x al primo membro e raccogliamo il fattor comune x: applichiamo poi la legge di annullamento del prodotto

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x \cdot (x-1) = 0 \left\langle \begin{matrix} x = 0 \\ x = 1 \end{matrix} \right.$$

Quindi $S = \{0,1\}$.

Vediamo ora come risolvere le equazioni di secondo grado *pure*

$$ax^2 + c = 0$$

Partiamo con un esempio elementare, da cui poi trarremo un procedimento risolutivo generale.

Consideriamo l'equazione pura

$$x^2 = 4$$

Una soluzione è un numero che elevato alla seconda dà 4: il numero positivo che elevato al quadrato è 4 è $\sqrt{4} = 2$; l'unica altra soluzione è $-\sqrt{4} = -2$, quindi $S = \{-2,2\}$.

Abbiamo ottenuto la soluzione dell'equazione con i seguenti passaggi

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$$

Questo esempio ci suggerisce un procedimento generale:

$$x^2 = numero \Rightarrow x = \pm\sqrt{numero}$$

Risoluzione equazioni spurie
Procedimento risolutivo

Per risolvere un' equazione di secondo grado *pura* dobbiamo

1. Isolare x^2, riconducendoci alla forma $x^2 = numero$
2. Le soluzioni, se esistono, sono del tipo $x = \pm\sqrt{numero}$

Osserviamo esplicitamente che, diversamente dalle equazioni spurie, le equazioni pure possono non avere soluzione.

Esempio 1.
Risolviamo la seguente equazione di secondo grado pura

$$4x^2 - 9 = 0$$

Ricaviamo x^2 e passiamo alla radice

$$x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \Rightarrow x = \pm\frac{3}{2}$$

quindi $S = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$.

Esempio 2.
Risolviamo la seguente equazione

$$4x^2 + 1 = 0$$

Ricaviamo x^2

$$x^2 = -\frac{1}{4}$$

A questo punto possiamo concludere che non esistono soluzioni, perché un quadrato non è mai negativo: quindi $S = \emptyset$.

Potevamo pervenire alla soluzione anche senza fare considerazioni sul segno del quadrato, procedendo in modo più pedante e applicando la strategia risolutiva passando alla radice

$$x = \pm\sqrt{-\frac{1}{4}}$$

la radice non è definita perché il radicando è negativo e dobbiamo concludere che l'equazione non ha soluzioni.

Esercizio.
Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado incomplete, dopo aver stabilito se sono equazioni pure o spurie.

1) $x^2 + 2x = 0$	2) $x^2 = x$	3) $9 = x^2$	4) $1 = 25x^2$	5) $3x^2 + 1 = 0$
6) $x = 6x^2$	7) $4x^2 = -9x$	8) $7x^2 + x = 0$	9) $3x^2 - 1 = 0$	10) $5x^2 - 7 = 0$

Soluzione.

1) $S = \{-2,0\}$	2) $S = \{0,1\}$	3) $S = \{-3,+3\}$	4) $S = \left\{-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right\}$	5) $S = \emptyset$
6) $S = \left\{0, \frac{1}{6}\right\}$	7) $S = \left\{-\frac{9}{4}, 0\right\}$	8) $S = \left\{-\frac{1}{7}, 0\right\}$	9) $S = \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$	10) $S = \left\{-\frac{\sqrt{35}}{5}, \frac{\sqrt{35}}{5}\right\}$

3.8 Equazioni complete

Vediamo ora come risolvere le equazioni di secondo grado riconducibili alla forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dove i coefficienti a, b, c sono diversi da zero, ovvero equazioni in cui compaiono il termine quadratico, quello lineare e il termine noto: le equazioni di secondo grado di questo tipo sono chiamate *complete.*

Ricordiamo il teorema fondamentale di scomposizione.

Abbiamo visto che, posto $\Delta = b^2 - 4ac$ (il discriminante) vale $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$, pertanto l'equazione da risolvere ha la forma

$$a\left[\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$$

Quindi

- se $\Delta < 0$, posto $k = -\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ l'equazione si può esprimere come

  $$a\left[\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + k\right] = 0, \qquad k > 0$$

  In questo caso sia il fattore a che $\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + k$ sono diversi diversi da zero qualunque valore assuma la x: pertanto non abbiamo soluzioni.

- se $\Delta \geq 0$ il polinomio $ax^2 + bx + c$ si può scrivere come $a(x - x_1)(x - x_2)$, dove $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$: in questo caso l'equazione da risolvere ha la forma

  $$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

  che ha per soluzioni

formula risolutiva

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Osserviamo esplicitamente che, se $\Delta = 0$, le soluzioni x_1 e x_2 coincidono: infatti

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b \pm 0}{2a} = -\frac{b}{2a}$$

e l'equazione ha una sola soluzione (fornita comunque dalla formula risolutiva).

Riassumiamo i risultati ottenuti.

Risoluzione equazioni complete

Procedimento risolutivo

È data l'equazione di secondo grado completa

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dove i coefficienti a, b, c sono diversi da zero.

Allora, posto $\Delta = b^2 - 4ac$

- se $\Delta < 0$ l'equazione ha *zero soluzioni:* in altri termini $S = \emptyset$.
- se $\Delta > 0$ l'equazione ha *due soluzioni*, ottenute dalla formula

  $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  Pertanto $S = \{x_1, x_2\}$.
- se $\Delta = 0$ l'equazione ha *una soluzione*, ottenuta comunque dalla formula risolutiva. Quindi $S = \{x_1\}$ (o, il chè è lo stesso, $S = \{x_2\}$).

Il nome *discriminante* proviene esattamente da questo risultato: il Δ *discrimina,* appunto, il numero delle soluzioni di una equazione di secondo grado.

Osserviamo la formula risolutiva

Quadrato di b (o del numero scritto fuori dalla parentesi)

È conveniente stabilire prima di tutto il segno, che è l'opposto del segno di $a \cdot c$. Dopodichè si moltiplica per 4 il

Opposto di b (se $b > 0$ l'opposto è negativo, se $b < 0$ l'opposto è positivo)

$$x_{1,2} = \frac{\boxed{-b} \mp \sqrt{\boxed{b^2}\ \boxed{-4ac}}}{\boxed{2a}}$$

Doppio di a

Esempio 1.
Risolviamo la seguente equazione di secondo grado completa in forma normale

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

In questo caso $a = 2, b = 5$ e $c = -3$.

Applichiamo la formula risolutiva, anche senza calcolare preventivamente il Δ: nel caso in cui sia negativo, l'equazione associata non avrà soluzioni.

Quadrato di 5

Opposto del segno di $a \cdot c$

Opposto di 5

Senza considerare il segno, già stabilito a monte: $4 \cdot 2 \cdot 3$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \mp \sqrt{25 + 24}}{4} =$$

Doppio di 2

Il discriminante è positivo, quindi l'equazione ha due soluzioni distinte.

$$= \frac{-5 \mp \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \mp 7}{4} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5-7}{4} = -\dfrac{12}{4} = -3 \\ x_2 = \dfrac{-5+7}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Pertanto $S = \left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$.

Esempio 2.
Risolviamo la seguente equazione di secondo grado completa

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

I coefficienti sono $a = 4, b = -4$ e $c = +1$.

Applichiamo la formula risolutiva

Quadrato di 4

Opposto di -4

Opposto del segno di $a \cdot c$

$$x_{1,2} = \frac{+4 \mp \sqrt{16-16}}{8} =$$

Il discriminante è nullo, quindi l'equazione ha una sola soluzione.

Doppio di 4

Senza considerare il segno, già stabilito a monte: $4 \cdot 2 \cdot 3$

$$\frac{4 \mp \sqrt{0}}{8} = \frac{4 \mp 0}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Quindi $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Esempio 3.

Risolviamo la seguente equazione di secondo grado completa

$$3x^2 - 4x + 5 = 0$$

I coefficienti sono $a = 3, b = -4$ e $c = +5$.

Applichiamo la formula risolutiva

$$x_{1,2} = \frac{+4 \pm \sqrt{16-60}}{6} = \frac{+4 \pm \sqrt{-44}}{6}$$

In questo caso $\Delta = -44$ è negativo: pertanto l'equazione non ha soluzione e $S = \emptyset$.

La formula ridotta

È data l'equazione completa

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Nel caso in cui il coefficiente b sia un numero pari o comunque un numero tale che $\frac{b}{2}$ abbia un'espressione più semplice rispetto a b (ad esempio se $b = 8$, dove $\frac{b}{2} = 4$ o se $b = 2\sqrt{3}$, dove $\frac{b}{2} = \sqrt{3}$) esiste una formula risolutiva equivalente a quella che abbiamo dato ma più semplice, che prende il nome di *formula ridotta.*

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} \qquad \textit{formula ridotta}$$

Vediamo come ricavarla: partiamo dalla formula risolutiva

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e dividiamo per 2 il numeratore e il denominatore, ottenendo

$$x_{1,2} = \frac{\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2}}{a}$$

Distribuiamo il 2 al numeratore

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2}}{a}$$

e portiamo il 2 dentro la radice

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4}}}{a}$$

Distribuiamo infine il 4 nel radicando

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}}{a}$$

e otteniamo infine

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

L'espressione $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$ si indica col simbolo $\frac{\Delta}{4}$; la formula ridotta può quindi essere espressa anche come

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}$$

Il ruolo di $\frac{\Delta}{4}$ è del tutto analogo a quello del discriminante: in particolare

- se $\frac{\Delta}{4} > 0$ l'equazione ha due soluzioni distinte
- se $\frac{\Delta}{4} = 0$ l'equazione ha una sola soluzione
- se $\frac{\Delta}{4} < 0$ l'equazione non ha soluzioni

Esempio 1.
Risolviamo l'equazione

$$3x^2 + 8x + 5 = 0$$

In questo caso $b = 8$, dunque $\frac{b}{2} = 4$; è più conveniente usare la formula ridotta

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 15}}{3} =$$

$$= \frac{-4 \pm 1}{3} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-4 - 1}{3} = -\dfrac{5}{3} \\ x_2 = \dfrac{-4 + 1}{3} = -1 \end{cases}$$

Quindi $S = \left\{-\frac{5}{3}, -1\right\}$.

Esempio 2.
Risolviamo l'equazione

$$8x^2 - 2\sqrt{3}x - 3 = 0$$

In questo caso $b = -2\sqrt{3}$, che non è un numero pari; nonostante questo $\frac{b}{2} = -\sqrt{3}$ è una espressione più semplice rispetto a b. Anche in questo caso, quindi, è più conveniente usare la formula ridotta

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 24}}{3} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3 + 24}}{3} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{27}}{3}$$
$$= \frac{\sqrt{3} \pm 3\sqrt{3}}{3} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{3} = -\dfrac{2}{3}\sqrt{3} \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Dunque $S = \left\{-\frac{2}{3}\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right\}$.

Esercizio.
Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado complete.
Ricorda di utilizzare la formula risolutiva ridotta nel caso risulti più conveniente.

1) $x^2 - x - 6 = 0$ 2) $x^2 + 2x - 8 = 0$ 3) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ 4) $\sqrt{5}x^2 - 4x - \sqrt{5} = 0$

5) $x^2 - 8x + 4 = 0$ 6) $2x^2 + 3x - 9 = 0$ 7) $2x^2 - 4\sqrt{3}x + 5 = 0$ 8) $2x^2 - 3x - 2 = 0$

Soluzione.

1) $S = \{-2,3\}$ 2) $S = \{-4,2\}$ 3) $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ 4) $S = \left\{-\frac{1}{\sqrt{5}}, \sqrt{5}\right\}$

5) $S = \left\{4 - 2\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3}\right\}$ 6) $S = \left\{-3, \frac{3}{2}\right\}$ 7) $S = \left\{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ 8) $S = \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$

3.9 Relazioni tra radici e coefficienti

Consideriamo la generica equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

e supponiamo che ammetta le soluzioni x_1 e x_2 (che, eventualmente, possono assumere lo stesso valore).

Esistono importanti relazioni tra le radici x_1, x_2 e i coefficienti a, b, c dell'equazione:

$$(1)\ S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$(2)\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Dimostriamole.
Sappiamo che, se le soluzioni esistono, sono date da

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Dimostriamo la relazione (1): sommando le radici otteniamo

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

da cui $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

Occupiamoci ora della relazione (2): moltiplichiamo le due radici

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

pertanto $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

3.10 Esercizi

Esercizio 1.

Risolvi le seguenti equazioni numeriche intere.

1) $x^2 + 6x = 0$ 2) $x^2 - \sqrt{2}x = 0$ 3) $(x-5)(x-2) = 10$

4) $\frac{1}{9}(2x-1)^2 = 4$ 5) $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = (2x-\sqrt{3})(2x+\sqrt{3})$

6) $\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - 2x = \left(2x-\frac{3}{4}\right)^2$ 7) $x^2(\sqrt{3}-2) + x = 0$ 8) $6x^2 = 5x$

9) $4x^2 - 1 = 0$ 10) $3x^2 + 1 = 0$ 11) $x(10-x) = 2(5x-2)$

12) $\frac{9+(x-6)^2-(2x+3)^2}{12} + 2x = 0$ 13) $\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{x^2+1}{3} = \frac{1}{6}$ 14) $2x^2 - 5\sqrt{2}x - 6 = 0$

15) $x^2 - 6x + 8 = 0$ 16) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ 17) $4x^2 + 3x + 5 = 0$

18) $3x^2 + 4x = 4$ 19) $x^2 + 1 = 2\sqrt{2}x$ 20) $16x^2 - 32x + 15 = 0$

21) $(x-3)^2 + (5-x)^2 = 2x - 6$ 22) $(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2}) - \sqrt{3}(x-2) = 2(\sqrt{3}-1)$

23) $\frac{x+2}{5} - \frac{x(x+2)}{6} - \frac{x^2}{3} = 1$

Soluzione.

1) $S = \{-6,0\}$ 2) $S = \{0, \sqrt{2}\}$ 3) $S = \{0, 7\}$

4) $S = \left\{-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right\}$ 5) $S = \left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ 6) $S = \left\{0, \frac{5}{6}\right\}$

7) $S = \{0, 2+\sqrt{3}\}$ 8) $S = \left\{0, \frac{5}{6}\right\}$ 9) $S = \left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$

10) $S = \emptyset$ 11) $S = \{\pm 2\}$ 12) $S = \{\pm 2\sqrt{3}\}$

13) $S = \{0,6\}$ 14) $S = \left\{3\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ 15) $S = \{2,4\}$

16) $S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ 17) $S=\emptyset$ 18) $S=\left\{-2,\frac{2}{3}\right\}$

19) $S=\left\{\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1\right\}$ 20) $S=\left\{\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right\}$ 21) $S=\{4,5\}$

22) $S=\left\{2\sqrt{3},-\sqrt{3}\right\}$ 23) $S=\emptyset$

Esercizio 2.
Risolvi le seguenti equazioni numeriche fratte.

1) $\frac{1}{x^2-x}+\frac{1}{x}=1$

2) $\frac{8}{x+1}-\frac{3}{x}=\frac{6}{x^2-x}$

3) $\frac{x}{x^2-2}=\frac{\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}+1$

4) $\frac{1}{x^3+1}+\frac{x}{x^2-x+1}=\frac{2}{x+1}$

5) $\frac{9x+2}{3x^2-2x-8}=\frac{5}{2}-\frac{7}{3x^2+x-4}$

6) $\frac{x}{x-2}+\frac{x-10}{x^2-4}=\frac{2}{x+2}$

7) $\frac{4}{x-2}-\frac{4}{x^2}=\frac{7}{x^3-2x^2}$

8) $\frac{x-1}{x^2+2x-3}-\frac{x}{x-1}=\frac{2x}{x+3}$

9) $\frac{1}{2x^2-5x-12}+\frac{1}{4x^2+4x-3}=-\frac{1}{2x+3}$

Soluzione.

1) $S=\{2\}$ 2) $S=\left\{-\frac{1}{5},3\right\}$ 3) $S=\left\{0,1-\sqrt{2}\right\}$

4) $S=\left\{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$ 5) $S=\left\{\frac{6}{5},3\right\}$ 6) $S=\{-3\}$

7) $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$ 8) $S=\emptyset$ 9) $S=\left\{\frac{3\pm\sqrt{11}}{2}\right\}$

Esercizio 3.
Trova un'equazione di secondo grado che abbia come insieme delle soluzioni

a) $S=\emptyset$ b) $S=\{-1,2\}$ c) $S=\{3\}$

Esercizio 4.
Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado parametriche, dopo aver individuato i valori del parametro per cui esistano le soluzioni.

1) $x^2-2kx-3k^2=0$ 2) $3x^2+4mx-4m^2=0$ 3) $x^2+kx-k-1=0$

Soluzione.

1) $S = \{-k, 3k\}$ 2) $S = \left\{-2m, \frac{2}{3}m\right\}$ 3) $S = \{1, -k-1\}$

Esercizio 5.

È data l'equazione $x^2 + 4x + c = 0$. Trova il valore del parametro c sapendo che -1 è una soluzione; trova in seguito l'altra soluzione (senza applicare la formula risolutiva).

Soluzione.

$c = 3;\ x_2 = -3$.

Esercizio 6.

Trova i valori del parametro a in modo che l'equazione

$$x^2 + 2(a+2)x + a^2 - 4 = 0$$

a) ammetta soluzioni;

b) abbia due soluzioni coincidenti;

c) una soluzione sia $\frac{3}{4}$;

d) la somma delle soluzioni sia $\frac{3}{2}$.

Soluzione.

a) $a \geq -2$ *b)* $a = -2$ *c)* $a = \frac{1}{4} \vee a = \frac{7}{4}$ *d)* $a = -\frac{11}{4}$.

Esercizio 7.

Trova per quali valori del parametro m l'equazione

$$x^2 - 2x - m - 3 = 0$$

ammette soluzioni distinte e positive.

Soluzione.

$-4 < m < -3$.

Esercizio 8.

È data l'equazione $x^2 - kx - 2 = 0$. Trova per quali valori di k

a) la somma dei quadrati delle soluzioni è 13;

b) la somma dei reciproci delle radici è -2.

Soluzione.

a) $k = \pm 3$ *b)* $k = 4$.

Esercizio 9.

È data l'equazione $x^2 - 4x - k + 4 = 0$. Trova per quali valori di k

a) ammette soluzioni reali;

b) la somma dei cubi delle radici è 40.

Soluzione.
a) $k \geq 0$ *b)* $k = 2$.

Esercizio 10.
È data l'equazione $2x^2 + 3x - k^2 + 1 = 0$. Trova per quali valori di k

a) ammette soluzioni reali;

b) le radici sono antireciproche;

c) una delle radici è -4

Soluzione.
a) $\forall k \in \mathbb{R}$ *b)* $k = \pm\sqrt{3}$ *c)* $k = \pm\sqrt{21}$.

Esercizio 11.
È data l'equazione $x^2 - (2k - 1)x + k^2 - 1 = 0$. Trova per quali valori di k

a) ammette soluzioni reali;

b) le radici sono opposte;

c) le soluzioni sono reciproche;

d) una delle radici è 0;

e) una delle radici è 1.

Soluzione.
a) $k \leq \frac{5}{4}$ *b)* $k = \frac{1}{2}$ *c)* $k = -\sqrt{2}$ *d)* $k = \pm 1$ *e)* $k = 1$.

Esercizio 12.
È data l'equazione $x^2 - 2kx - 3k + 4 = 0$. Trova per quali valori di k

a) ammette soluzioni reali;

b) la somma delle radici è -10;

c) il prodotto delle soluzioni è 10;

d) la somma dei reciproci delle radici è -1

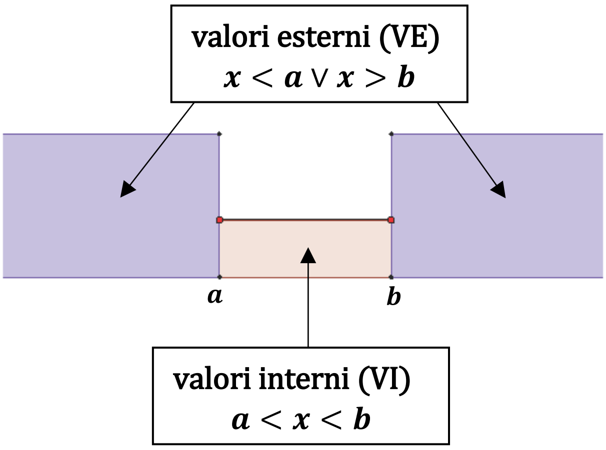
Soluzione.
a) $k \leq -4 \vee k \geq 1$ *b)* $k = -5$ *c)* $\nexists k \in \mathbb{R}$ *d)* $k = 4$.

Le disequazioni di secondo grado

Definizione.
Siano a e b due numeri reali tali che $a < b$.
Diciamo che un numero reale x è

- *un valore esterno tra* a *e* b *(VE) se* $x < a \vee x > b$
- *un valore interno tra* a *e* b *(VI) se* $a < x < b$

Se desideriamo includere gli estremi useremo scritture del tipo $x \leq a \vee x \geq b$ o $a \leq x \leq b$.



Esempio.

- x è un valore esterno (VE) tra 2 e 3 (compresi 2 e 3) se $x \leq 2 \vee x \geq 3$
- x è un valore esterno (VE) tra 2 e 3 (compresi 2 ed escluso 3) se $x \leq 2 \vee x > 3$
- x è un valore interno (VI) tra 2 e 3 (compresi 2 e 3) se $2 \leq x \leq 3$
- x è un valore interno (VI) tra 2 e 3 (escluso 2 e compreso 3) se $2 < x \leq 3$

3.11 Studio del segno di un polinomio di secondo grado

Prendiamo il generico polinomio di secondo grado

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

e studiamo il suo comportamento il termini del segno.

Chiamiamo *equazione associata (al polinomio)*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

le cui, soluzioni, se esistono, sono date da

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ricordiamo che l'equazione ha due soluzioni distinte se il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, ha una sola soluzione (o, come si suol dire, due soluzioni coincidenti) se $\Delta = 0$ e non ha soluzioni se $\Delta < 0$.

Grazie al teorema di scomposizione abbiamo visto che il polinomio si può scrivere come

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

dove $\Delta = b^2 - 4ac$ è il discriminante.

Caso 1.
L'equazione associata

$$ax^2 + bx + c = 0$$

non ha soluzione, ovvero $\Delta < 0$.
Se $\Delta < 0$ l'espressione fra parentesi quadra $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ è sempre positiva: in questo caso, quindi, il polinomio $ax^2 + bx + c$ *ha segno costante, uguale al segno di* a.

In altri termini

- se $a > 0$ allora $ax^2 + bx + c > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$
- se $a < 0$ allora $ax^2 + bx + c < 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$

Caso 2.
L'equazione associata

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ha una sola soluzione, ovvero $\Delta = 0$.

Allora il polinomio $ax^2 + bx + c$ si può scrivere come

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

quindi il polinomio, a meno del fattore a, è il quadrato di un binomio.

In particolare

- se $a > 0$ allora $ax^2 + bx + c \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$.

- se $a < 0$ allora $ax^2 + bx + c \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

In altri termini il polinomio è concorde con a, ad eccezione dell'unico punto in cui si annulla.

Caso 3.
L'equazione associata

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ha due soluzioni distinte, ovvero $\Delta > 0$.

Il teorema di scomposizione ci assicura che il polinomio $ax^2 + bx + c$ si può scrivere come

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

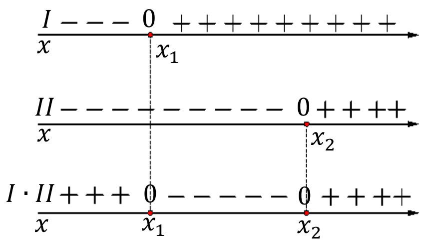
dove x_1, x_2 sono le soluzioni dell'equazione associata.

Studiamo il segno di

$$\underbrace{(x - x_1)}_{I}\underbrace{(x - x_2)}_{II}$$

$\boxed{x: I > 0} \Rightarrow x - x_1 > 0 \Rightarrow \boxed{x > x_1}$

$\boxed{x: II > 0} \Rightarrow x - x_2 > 0 \Rightarrow \boxed{x > x_2}$



Quindi

- $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ se x è un VE, ovvero se $x < x_1 \vee x > x_2$
- $(x - x_1)(x - x_2) < 0$ se x è un VI, ovvero se $x_1 < x < x_2$

Il segno del polinomio

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

dipende pertanto dal segno di a.

Se $a > 0$

- $ax^2 + bx + c > 0$ se x è un VE fra x_1 e x_2, ovvero se $x < x_1 \vee x > x_2$
- $ax^2 + bx + c < 0$ se x è un VI fra x_1 e x_2, ovvero se $x_1 < x < x_2$

Se $a < 0$

- $ax^2 + bx + c < 0$ se x è un VE fra x_1 e x_2, ovvero se $x < x_1 \vee x > x_2$
- $ax^2 + bx + c > 0$ se x è un VI fra x_1 e x_2, ovvero se $x_1 < x < x_2$

Osservazione.
In base alle considerazioni precedenti possiamo notare che

- il polinomio $ax^2 + bx + c$ e il coefficiente a sono *concordi* se x è un *valore esterno* **VE** fra x_1 e x_2

- il polinomio $ax^2 + bx + c$ e il coefficiente a sono *discordi* se x è un *valore interno* **VI** fra x_1 e x_2

Questa relazione tra il segno del polinomio e il segno di a può essere ricordata con la seguente regola, che prende il nome di regola del **D.I.C.E.** .

Questa parola è un acronimo che sta a significare **D**iscordi **I**nterni, **C**oncordi **E**sterni e ci aiuta a ricordare che

- per i valori di x *interni tra* x_1 e x_2 il polinomio è discorde col coefficiente a
- per i valori di x *esterni tra* x_1 e x_2 il polinomio è concorde col coefficiente a

Vediamo alcuni esempi di studio del segno di polinomi di secondo grado.

Esempio 1.
Studiamo il segno del polinomio quadratico

$$x^2 + x + 1$$

Risolviamo anzitutto l'equazione associata

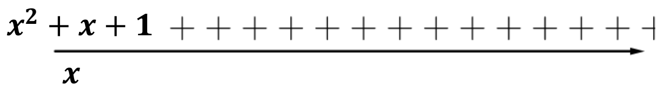
$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

Il discriminante è negativo, dunque l'equazione associata non ha soluzioni. Abbiamo visto che, in questo caso, il polinomio ha segno costante uguale al segno di $a = 1$ quindi

$$x^2 + x + 1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

e, graficamente



Esempio 2.
Studiamo il segno del polinomio di secondo grado

$$25x^2 - 10x + 1$$

Risolviamo anzitutto l'equazione associata

$$25x^2 - 10x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-25}}{25} = \frac{5 \pm \sqrt{0}}{25}$$

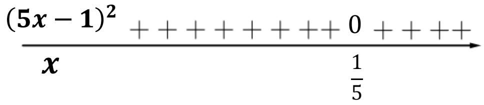
Il discriminante è nullo: questo significa che il polinomio, a meno del segno, è il quadrato di un binomio.

Infatti

$$25x^2 - 10x + 1 = (5x-1)^2$$

Quindi

- $25x^2 - 10x + 1 = 0 \Leftrightarrow 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$
- $25x^2 - 10x + 1 > 0 \Leftrightarrow 5x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{5}$



Esempio 3.
Studiamo il segno del polinomio di secondo grado

$$-4x^2 + 12x - 9$$

Risolviamo anzitutto l'equazione associata

$$-4x^2 + 12x - 9 = 0 \Longrightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{4}$$

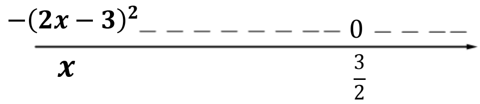
Il discriminante è nullo: questo significa che il polinomio, a meno del segno, è il quadrato di un binomio.

Infatti

$$-4x^2 + 12x - 9 = -(4x^2 - 12x + 9) = -(2x-3)^2$$

Quindi

- $-4x^2 + 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$
- $-4x^2 + 12x - 9 < 0 \Leftrightarrow 2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2}$



Esempio 4.
Studiamo il segno di

$$x^2 + 2x - 3$$

Risolviamo l'equazione associata

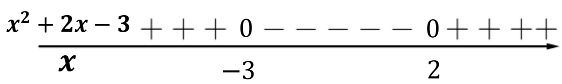
$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{1} = -1 \pm 2 = \begin{cases} x_1 = -1 - 2 = -3 \\ x_2 = -1 + 3 = 2 \end{cases}$$

Abbiamo trovato due soluzioni dell'equazione associata: quindi abbiamo visto che il polinomio ha lo stesso segno del coefficiente $a = 1$ (dunque, in questo caso, positivo) per *i valori esterni VE tra* -3 *e* 2*,* mentre è negativo per i valori interni.

Quindi

- $x^2 + 2x - 3 > 0$ se $x < -3 \vee x > 2$



- $x^2 + 2x - 3 < 0$ se $-3 < x < 2$
- $x^2 + 2x - 3 = 0$ se $x = -3 \vee x = 2$

Esempio 4.
Studiamo il segno di

$$4 - x^2$$

Risolviamo l'equazione associata

$$4 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 4 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Longrightarrow x = \pm 2$$

L'equazione associata ha due soluzioni, quindi il polinomio ha lo stesso segno del coefficiente $a = -1$ (in questo caso negativo) per *i valori esterni VE tra* -2 *e* 2*,* mentre è positivo per i valori interni.

Quindi

- $4 - x^2 > 0$ se $-2 < x < 2$
- $4 - x^2 < 0$ se $x < -2 \vee x > 2$
- $4 - x^2 = 0$ se $x = -2 \vee x = 2$

$\mathbf{4 - x^2}$	$- - -$	0	$+ + + + +$	0	$- - - - -$
$\boldsymbol{x}$		-2		2	

Esercizio.
Studia il segno dei seguenti polinomi.

1) $P(x) = x^2 + 6x$
2) $P(x) = x^2 - x + 3$
3) $P(x) = x^2 - 3$
4) $P(x) = -x^2 - 3$
5) $P(x) = -x^2 + 3x + 54$
6) $P(x) = \sqrt{5}x^2 - 4x - \sqrt{5}$
7) $P(x) = -4x^2 + 12x - 9$
8) $P(x) = -3x^2 + 4x + 5$
9) $P(x) = x^2 - 6x + 9$

Soluzione.

1)
$P(x) > 0 \Longrightarrow x < -6 \vee x > 0$
$P(x) < 0 \Longrightarrow -6 < x < 0$
$P(x) = 0 \Longrightarrow x = -6 \vee x = 0$

2)
$P(x) > 0 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$
$P(x) < 0 \Longrightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$
$P(x) = 0 \Longrightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$

3)
$P(x) > 0 \Longrightarrow x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$
$P(x) < 0 \Longrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$
$P(x) = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

4)
$P(x) > 0 \Longrightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$
$P(x) < 0 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$
$P(x) = 0 \Longrightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$

5)
$P(x) > 0 \Longrightarrow -6 < x < 0$
$P(x) < 0 \Longrightarrow x < -6 \vee x > 9$
$P(x) = 0 \Longrightarrow x = -6 \vee x = 9$

6)
$P(x) > 0 \Longrightarrow x < -\frac{\sqrt{5}}{5} \vee x > \sqrt{5}$
$P(x) < 0 \Longrightarrow -\frac{\sqrt{5}}{5} < x < \sqrt{5}$

$P(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{5}}{5} \vee x = \sqrt{5}$

7)
$P(x) > 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$
$P(x) < 0 \Rightarrow x \neq \frac{3}{2}$
$P(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

8)
$P(x) > 0 \Rightarrow -2 < x < \frac{10}{3}$
$P(x) < 0 \Rightarrow x < -2 \vee x > \frac{10}{3}$
$P(x) = 0 \Rightarrow x = -2 \vee x = \frac{10}{3}$

9)
$P(x) > 0 \Rightarrow x \neq 3$
$P(x) < 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$
$P(x) = 0 \Rightarrow x = 3$

Con gli strumenti che abbiamo introdotto siamo in grado di risolvere ogni disequazione di secondo grado, dopo averla portata nella forma canonica

$$ax^2 + bx + c \lesseqqgtr 0$$

Riportiamo la strategia risolutiva.

3.12 Risoluzione delle disequazioni di secondo grado

Per trovare la soluzione dell'equazione di secondo grado in forma canonica

$$ax^2 + bx + c \lesseqqgtr 0$$

dobbiamo per prima cosa risolvere l'equazione associata

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Sappiamo che una equazione di secondo grado può avere 0, 1 o 2 soluzioni: in ognuno di questi casi attueremo una specifica strategia risolutiva per risolvere la disequazione.

In particolare

- se l'equazione associata ha 0 soluzioni, abbiamo visto che il polinomio ha segno costante uguale al segno del coefficiente a: se il polinomio e a sono concordi la disequazione è sempre verificata, in caso contrario non è mai verificata.

- se l'equazione associata ha 1 soluzione, sappiamo che il polinomio è, a meno del segno, lo sviluppo del quadrato del binomio. Risolviamo quindi la disequazione esprimendo il trinomio come un quadrato.

- se l'equazione associata ha 2 soluzioni x_1 e x_2 sappiamo che il segno del polinomio e il segno del coefficiente a sono concordi per i valori esterni fra x_1 e x_2 e sono discordi per i valori interni. Pertanto la disequazione ha per soluzione i valori esterni fra x_1 e x_2 se il polinomio e a sono concordi e i valori interni se sono discordi: possiamo ricordarci questo procedimento applicando la regola del **DICE** (Discordi-Interni, Concordi-Esterni).

Riportiamo di seguito per comodità lo schema risolutivo.

Risoluzione equazioni di secondo grado

Procedimento risolutivo

Per risolvere la disequazione di secondo grado in forma canonica

$$ax^2 + bx + c \lesseqgtr 0$$

risolviamo anzitutto l'equazione associata

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Se l'equazione ha 0 soluzioni, la disequazione è *verificata per ogni valore di* x (*SV,* sempre verificata) o *per nessun valore di* x (*MV,* mai verificata).

In particolare

- $S: \forall x \in \mathbb{R}$ se a e il polinomio sono *concordi*
- $S: \nexists x \in \mathbb{R}$ se a e il polinomio sono *discordi*

Se l'equazione ha 2 soluzioni x_1 e x_2 la soluzione della disequazione è costituita o dai *valori interni* (*VI)* o dai *valori esterni (VE)* fra x_1 e x_2.

Per ricordare quali intervalli prendere utilizziamo la regola del ***DICE*** (Discordi-Interni, Concordi-Esterni).

Se l'equazione ha 1 soluzione, risolviamo la disequazione esprimendo il trinomio come quadrato di un binomio.

Vediamo qualche esempio.

Esempio 1.
Risolviamo $x^2 + 4x + 5 > 0$.

Passiamo all'equazione associata

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

e risolviamola

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 5}}{2}$$

Il discriminante (in questo caso $\frac{\Delta}{4}$) è negativo, pertanto l'equazione associata ha 0 soluzioni.

Sappiamo quindi che la disequazione o è sempre verificata o non è mai verificata: in questo caso, visto che il coefficiente $a = 1 > 0$ e il polinomio $x^2 + 4x + 5 > 0$ sono concordi, la disequazione è sempre verificata.

Quindi

$$S: \forall x \in \mathbb{R}$$

Esempio 2.
Risolviamo $3x^2 + 7x + 5 < 0$.

Passiamo all'equazione associata

$$3x^2 + 7x + 5 = 0$$

da cui

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 60}}{6}$$

Anche in questo caso il discriminante è negativo e l'equazione associata ha 0 soluzioni.

Il coefficiente $a = 3 > 0$ e il polinomio $3x^2 + 7x + 5 < 0$ sono discordi, dunque la disequazione non è mai verificata.

Pertanto $S: \nexists x \in \mathbb{R}$.

Esempio 3.
Risolviamo $-x^2 - 5 \leq 0$.

Il coefficiente di x^2 è negativo: in questo caso, anche se non è obbligatorio, è conveniente moltiplicare per -1 il primo e il secondo membro *ricordando di cambiare il verso alla disuguaglianza.*

Ci portiamo così a risolvere la disequazione

$$x^2 + 5 \geq 0$$

Passiamo quindi all'equazione associata $x^2 + 5 = 0$ che ha 0 soluzioni.

Il coefficiente $a = 1 > 0$ e il polinomio $x^2 + 5 \geq 0$ sono concordi, dunque la disequazione è sempre verificata. Pertanto $S: \forall x \in \mathbb{R}$.

Esempio 4.
Risolviamo $x^2 - 6x + 9 > 0$.

Passiamo all'equazione associata

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

da cui

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-9}}{1}$$

In questo caso il discriminante è nullo e l'equazione associata ha 1 soluzione.

Questo significa che il trinomio è lo sviluppo del quadrato di un binomio, infatti $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.

Naturalmente, se ce ne fossimo accorti subito, avremmo potuto evitare di risolvere l'equazione associata.

Dobbiamo quindi risolvere la disequazione

$$(x-3)^2 > 0$$

che ha per soluzione $S: x \neq 3$.

Esempio 5.
Risolviamo $-4x^2 + 4x + 1 \geq 0$.

Conviene cambiare di segno il primo membro e il verso della disuguaglianza e portarci così a risolvere la disequazione

$$4x^2 - 4x + 1 \leq 0$$

Passiamo quindi all'equazione associata

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

la cui soluzione è data da

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{4}$$

Anche in questo caso il discriminante è nullo e l'equazione associata ha 1 soluzione.

Questo significa che il trinomio è lo sviluppo del quadrato di un binomio: risolviamo quindi la disequazione esprimendo il trinomio come quadrato

$$(2x-1)^2 \leq 0$$

che è verificata se e solo se $x = \frac{1}{2}$. Dunque $S: x = \frac{1}{2}$.

Esempio 6.
Risolviamo $x^2 + 3x - 10 \geq 0$.

Passiamo all'equazione associata

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

da cui

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3-7}{2} = -5 \\ x_2 = \dfrac{-3 \pm 7}{2} = 2 \end{cases}$$

L'equazione associata ha 2 soluzioni: la soluzione della disequazione è data scegliendo o i *valori interni* fra -5 e 2 o i *valori esterni*.

Poiché il coefficiente $a = 1 > 0$ e il polinomio $x^2 + 3x - 10 \geq 0$ sono concordi, utilizzando la regola del *DICE* sappiamo che la soluzione è data dai *valori esterni* (Concordi-Esterni).

Quindi $S: x < -5 \vee x > 2$.

Esempio 7.
Risolviamo $x^2 - 9 < 0$.

Passiamo all'equazione associata

$$x^2 - 9 = 0$$

e risolviamola

$$x^2 = 9 \Longrightarrow x = \pm 3$$

L'equazione ha 2 soluzioni, dobbiamo perciò scegliere i valori interni o i valori esterni fra -3 e 3.

Il coefficiente $a = 1 > 0$ e il polinomio $x^2 - 9 < 0$ sono discordi, pertanto la soluzione è data dai *valori interni* (Discordi-Interni).

Quindi $S: -3 < x < 3$.

Esempio 8.
Risolviamo $x - x^2 \geq 0$.

In questo caso il coefficiente di x^2 è negativo e conviene cambiare di segno il primo membro e, dunque, il verso della disuguaglianza. Otteniamo così

$$x^2 - x \leq 0$$

Passiamo all'equazione associata

$$x^2 - x = 0$$

e risolviamola

$$x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$$

L'equazione ha 2 soluzioni, dobbiamo perciò scegliere i valori interni o i valori esterni fra 0 e 1.

Il coefficiente $a = 1 > 0$ e il polinomio $x^2 - x \leq 0$ sono discordi, pertanto la soluzione è data dai *valori interni* (Discordi-Interni).

Quindi $S: 0 \leq x \leq 1$.

Esercizio.
Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado.

1) $x^2 + 7x \geq 0$	2) $1 - x^2 > 0$	3) $x^2 - 3 > 0$
4) $-x^2 - 3 \leq 0$	5) $4x^2 + 5x - 6 \leq 0$	6) $2x^2 + 3x + 4 \leq 0$
7) $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 \leq 0$	8) $16x^2 - 9 < 0$	9) $x^2 \leq 0$
10) $x^2 - x + 1 > 0$	11) $x^2 - 3x + 10 \leq 0$	12) $4x + 21 - x^2 > 0$

Soluzione.

1) $S: x \leq -7 \vee x \geq 0$	2) $S: -1 < x < 1$	3) $S: x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$
4) $S: \forall x \in \mathbb{R}$	5) $S: -\frac{3}{2} \leq x \leq -1$	6) $S: \nexists x \in \mathbb{R}$
7) $S: x = 2$	8) $S: x < -\frac{3}{4} \vee x > \frac{3}{4}$	9) $S: x = 0$
10) $S: \forall x \in \mathbb{R}$	11) $S: \nexists x \in \mathbb{R}$	12) $S: -3 < x < 7$

3.13 Disequazioni fratte

La risoluzione delle disequazioni fratte ora non differisce di molto rispetto a quanto abbiamo visto per le disequazioni fratte di primo grado.

Certamente ogni disequazione fratta va per prima cosa portata nella forma normale

$$\frac{N}{D} \gtreqless 0$$

A questo punto dobbiamo studiare il segno del numeratore e del denominatore.

Sappiamo che se il numeratore o il denominatore sono *polinomi di primo grado,* per studiare il segno è sufficiente trovare i valori di x che li rendono positivi (risolvendo la disequazione $N > 0$ o $D > 0$).

Ora sappiamo studiare il segno direttamente anche nel caso in cui il numeratore o il denominatore siano *polinomi di secondo grado:* anche in questo caso possiamo chiederci per quali valori di x sono positivi (anche in questo caso risolvendo la disequazione $N > 0$ o $D > 0$).

Certamente può capitare che un polinomio di secondo grado sia ulteriormente scomponibile in due polinomi di primo grado, ad esempio nel caso di $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ *ma questo passaggio non è conveniente,* perché abbiamo a disposizione ora una strategia efficace per studiare il segno di un polinomio di grado 2.

In generale, se il numeratore o il denominatore sono *polinomi di grado maggiore di* 2*,* li dovremo scomporre in polinomi di *primo* e *secondo* grado, e studiare il segno di ognuno.

Vediamo qualche esempio.

Esempio 1.
Risolviamo

$$\frac{1}{x} < x$$

Mettiamo la disequazione in forma normale

$$\frac{1}{x} - x < 0$$

e, svolgendo i calcoli

$$\frac{1 - x^2}{x} < 0$$

Il numeratore e il denominatore sono polinomi rispettivamente di secondo e di primo grado e siamo quindi in grado di studiarne direttamente il segno (anche se il numeratore potrebbe essere ulteriormente scomposto).

$\boxed{x: N > 0} \Longrightarrow 1 - x^2 > 0$

Cambiamo di segno il primo membro e di verso alla disuguagianza

$$x^2 - 1 < 0$$

e passiamo all'equazione associata

$$x^2 - 1 = 0$$

che, risolta, dà

$$x = \pm 1$$

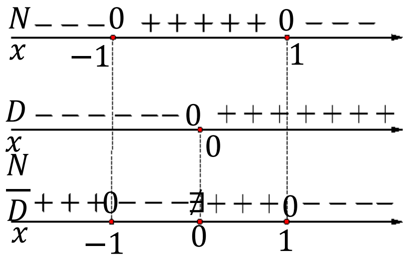
Abbiamo quindi 2 soluzioni dell'equazione: la soluzione della disequazione la otteniamo prendendone i valori interni o esterni: in questo caso, visto che abbiamo valori discordi tra a e il polinomio, avremo per soluzione

$$\boxed{-1 < x < 1}$$

Studiamo quindi il segno del denominatore.

$\boxed{x: D > 0} \Longrightarrow \boxed{x > 0}$

Non rimane che confrontare per via grafica i segni



La soluzione è quindi

$S: -1 < x < 0 \vee x > 1.$

Esempio 2.
Risolviamo

$$\frac{x^3 - 4x}{x^2 - 9} \geq 0$$

Il denominatore è un polinomio di secondo grado e siamo in grado di studiarlo direttamente, mentre il numeratore è di terzo grado: fattorizziamolo

$$\frac{x(x^2 - 4)}{x^2 - 9} \geq 0$$

ottenendo in questo modo solo fattori di primo grado e quadratici di cui sappiamo studiare il segno

$\boxed{x: N_1 > 0} \Longrightarrow \boxed{x > 0}$

$\boxed{x: N_2 > 0} \Longrightarrow x^2 - 4 > 0.$

Passiamo all'equazione associata $x^2 - 4 = 0$ ottenendo le due soluzioni ± 2.

Il coefficiente $a = 1 > 0$ e il polinomio $x^2 - 4 > 0$ sono concordi, pertanto la soluzione della disequazione è data dai valori esterni

$$\boxed{x < -2 \vee x > 2}$$

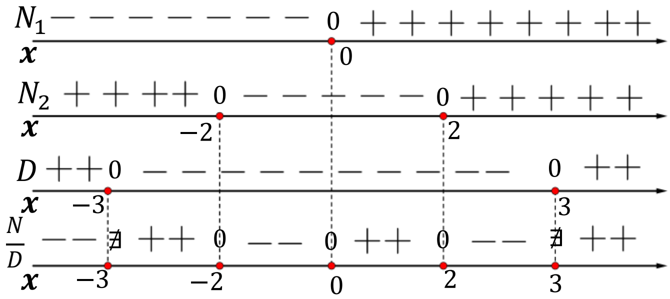
$\boxed{x: D > 0} \Longrightarrow x^2 - 9 > 0.$

Passiamo all'equazione associata $x^2 - 9 = 0$ ottenendo le due soluzioni ± 3.

Il coefficiente $a = 1 > 0$ e il polinomio $x^2 - 9 > 0$ sono concordi, pertanto la soluzione della disequazione è data dai valori esterni

$$\boxed{x < -3 \vee x > 3}$$

Costruiamo la tabella dei segni



La soluzione è quindi $S: -3 < x \leq -2 \vee 0 \leq x \leq 2 \vee x \geq 3$.

3.14 Esercizi

Esercizio 1.

Studia il segno dei seguenti polinomi.

1) $P(x) = 2x^2 - x - 21$ 2) $P(x) = 25x^2 - 60x + 36$ 3) $P(x) = 5x^2 + 3x + 3$

4)$P(x) = -9x^2 + 6x - 1$ 5)$P(x) = -x^2 + 3x - 4$ 6) $P(x) = 3x^2 - 8x + 5$

Soluzione.

1)
$P(x) > 0 \Longrightarrow x < -3 \vee x > \frac{7}{2}$
$P(x) < 0 \Longrightarrow -3 < x < \frac{7}{2}$
$P(x) = 0 \Longrightarrow x = -3 \vee x = \frac{7}{2}$

2)
$P(x) > 0 \Longrightarrow x \neq \frac{6}{5}$
$P(x) < 0 \Longrightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$
$P(x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{6}{5}$

3)
$P(x) > 0 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$
$P(x) < 0 \Longrightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$
$P(x) = 0 \Longrightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$

4)
$P(x) > 0 \Longrightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$
$P(x) < 0 \Longrightarrow x \neq \frac{1}{3}$
$P(x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{3}$

5)
$P(x) > 0 \Longrightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$
$P(x) < 0 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$
$P(x) = 0 \Longrightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$

6)
$P(x) > 0 \Longrightarrow x < 1 \vee x > \frac{5}{3}$
$P(x) < 0 \Longrightarrow 1 < x < \frac{5}{3}$
$P(x) = 0 \Longrightarrow x = 1 \vee x = \frac{5}{3}$

Esercizio 2.

Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado intere in forma canonica.

1) $-x^2 + 5x \geq 0$ 2) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ 3) $x^2 - 16x > 0$

4) $-2x^2 - 6 < 0$ 5) $-x^2 - x\sqrt{3} \leq 0$ 6) $\frac{x^2}{\sqrt{2}} + x\sqrt{2} > 0$

7) $x^2 + 2x + 5 \leq 0$ 8)$2x^2 - 9x + \frac{81}{8} > 0$ 9) $\sqrt{3}x^2 - 2x - \sqrt{3} \leq 0$

Soluzione.

1) $S: 0 \leq x \leq 5$

2) $S: x = 3$

3) $S: x < 0 \vee x > 4$

4) $S: \forall x \in \mathbb{R}$

5) $S: x \leq -\sqrt{3} \vee x \geq 0$

6) $S: x < -2 \vee x > 0$

7) $S: \nexists x \in \mathbb{R}$

8) $S: x \neq \frac{9}{4}$

9) $S: -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \sqrt{3}$

Esercizio 3.
Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado intere.

1) $\dfrac{x^2 - 1}{5} \geq 0$

2) $\frac{1}{5} - \frac{1-x^2}{3} \leq \frac{2x^2-2}{15}$

4) $\frac{2x(x+3)}{3} - \frac{3x^2-5}{6} > -\frac{5}{2}$

5) $(x - \sqrt{2})^2 + (x + \sqrt{2})^2 \geq (x - \sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}x$

7) $(x-2)^2 \geq 100$

8) $-3x^2 > x - 2$

9) $x^2 + \sqrt{6} > \sqrt{3}x + \sqrt{2}x$

10) $\frac{22}{9}x^2 + 1 \leq 2x^2 + \frac{4}{3}x$

Soluzione.

1) $S: x \leq -1 \vee x \geq 1$

2) $S: x = 0$

4) $S: x < -10 \vee x > -2$

5) $S: \forall x \in \mathbb{R}$

7) $S: x \leq -8 \vee x \geq 12$

8) $S: -1 < x < \frac{2}{3}$

9) $S: x < \sqrt{2} \vee x > \sqrt{3}$

10) $S: x = \frac{3}{2}$

Esercizio 4.
Risolvi le seguenti disequazioni fratte espresse in forma normale.

1) $\dfrac{4}{x^2 - 1} \geq 0$

2) $\frac{7}{x^2} \geq 0$

3) $\frac{1}{3x^2} \leq 0$

4) $\frac{x^2+1}{(x+1)^2} > 0$

5) $\left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2 \geq 0$

6) $\left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2 > 0$

7) $\frac{x+1}{4x^2-9x+2} > 0$

8) $\frac{x^2+1}{x^2+2} > 0$

9) $\frac{-1-x^2}{-x-x^2-1} < 0$

10) $\frac{3-x}{x^2-4} < 0$

11) $\frac{x^2-x-12}{x} \leq 0$

12) $\frac{x^2-6x+8}{x^2-4x+3} \geq 0$

13) $\frac{x^3-x^2}{4-x^2} \leq 0$

14) $\frac{x^2-3x}{(x+1)(x^2+x-2)} \leq 0$

Soluzione.

1) $S: x < -1 \vee x > 1$

2) $S: x \neq 0$

3) $S: \nexists x \in \mathbb{R}$

4) $S: x \neq 1$

5) $S: x \neq 3$

6) $S: x \neq -2 \wedge x \neq 3$

7) $S: -1 < x < \frac{1}{4} \vee x > 2$

8) $S: \forall x \in \mathbb{R}$

9) $S: \nexists x \in \mathbb{R}$

10) $S: -2 < x < 2 \vee x > 3$

11) $S: x \leq -3 \vee \ 0 < x < 4$

12) $S: x < -1 \vee \ 2 \leq x < 3 \vee x \geq 4$

13) $S: -2 < x < 1 \vee x > 2$

14) $S: x < -2 \vee \ -1 < x \leq 0 \vee \ 1 < x \leq 3$

Esercizio 5.

Risolvi le seguenti disequazioni fratte.

1) $x \leq \frac{6}{x-1}$

2) $4 - x > \frac{10}{x+3}$

3) $\frac{x+2}{x-3} < \frac{1}{x+2}$

4) $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-1} > 1$

5) $\frac{1}{x} > \frac{1}{x-1}$

6) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \geq \frac{2}{x^2-x}$

7) $\frac{1}{x^2-6x+9} + \frac{1}{3-x} \geq 2$

8) $\frac{1}{x^2-2} \leq \frac{1}{x-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}x+2}$

9) $\frac{3}{x^2-1} + \frac{6}{x^2+x} \geq \frac{x+2}{x^2-x}$

10) $\frac{1}{x^2-2x+1} - \frac{1}{x^2-1} > \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$

Soluzione.

1) $S: x \leq -2 \vee 1 < x \leq 3$

2) $S: x < -3 \vee -1 < x < 2$

3) $S: -2 < x < 3$

4) $S: -2 < x < 1$

5) $S: 0 < x < 1$

6) $S: 0 < x < 1 \vee x \geq \frac{3}{2}$

7) $S: 2 \leq x < \frac{7}{2} \wedge x \neq 3$

8) $S: -2 - 2\sqrt{2} \leq x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}$

9) $S: x < -1 \vee 0 < x < 1 \vee 2 \leq x \leq 4$

10) $S: x < -1 \vee 0 < x < 1 \vee x > 1$

4. Equazioni e disequazioni con quadrati, valori assoluti e irrazionali

4.1 I quadrati

Sia x un qualunque numero reale; si chiama *quadrato di* x l'espressione $x^2 = x \cdot x$.

Anzitutto osserviamo che il quadrato è definito qualunque sia la base; inoltre, dalla regola dei segni segue che

a) $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
b) $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

Notiamo dunque che un quadrato *non è mai un numero negativo*.

Rappresentando graficamente il segno di x^2 otteniamo

x^2 ++++++++++++++ 0 +++
x 0

4.2 Equazioni e disequazioni elementari contenenti un quadrato

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.
Studiamo il segno di $(6 - x)^2$.
E' sufficiente determinare i valori di x: $(6 - x)^2 > 0$; questo avviene per $x \neq 6$.
Inoltre $(6 - x)^2 = 0$ se $x = 6$; graficamente otteniamo

$(6 - x)^2$ +++++++++++++++ 0 +++
x 6

Esempio 2.
Risolviamo

$$(x-3)^2 > 0$$

E' sufficiente che $x-3 \neq 0$, ovvero $S: x \neq 3$.

Esempio 3.
Risolviamo

$$(x+5)^2 < -3$$

Poiché un quadrato è necessariamente un numero o positivo o nullo, in particolare non potrà *mai* essere minore di -3; dunque la disequazione non ha soluzione. Perciò $S = \emptyset$.

Esempio 4.
Risolviamo

$$(x-7)^2 \leq 0$$

Le soluzioni sono valori che sostituiti al posto di x rendono $(x-7)^2 < 0$ oppure $(x-7)^2 = 0$.
$(x-7)^2 < 0$ non è mai vera; $(x-7)^2 = 0$ è verificata per $x = 7$.
In definitiva la soluzione è $S = \{7\}$.

Esempio 5.
Risolviamo

$$\left(\frac{x-1}{x-5}\right)^2 > -4$$

Ricordiamo che una soluzione di una disequazione è un numero che *a)* può essere sostituto nell'espressione e che *b)* la rende vera.
Osserviamo che possono essere sostituiti *tutti i numeri, tranne il 5.* Non appena un numero può essere sostituito, la disequazione rimane certamente vera, poiché un quadrato è maggiore o uguale a zero: in particolare è maggiore di *-4.*
La soluzione è perciò $S: x \neq 5$.

Esercizio 1.
Studia il segno delle espressioni seguenti

a) $(1+x)^2$ b) $(2x-1)^2$

Esercizio 2.
Determina l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni

a) $(x+2)^2 > 0$ b) $(x-4)^2 \leq 0$ c) $(x-3)^2 \geq 0$ d) $\left(\frac{x-1}{x-6}\right)^2 \geq 0$ e) $\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2 > 0$

4.3 Il valore assoluto

Sia x un qualunque numero reale. Si chiama *valore assoluto di* x l'espressione

$$|x| \qquad x \text{ è detto } \textit{argomento}$$

definita come segue:

$$\text{se } x \geq 0 \text{ allora } |x| = x$$
$$\text{se } x < 0 \text{ allora } |x| = -x$$

Dunque il valore assoluto di zero o di un numero positivo è lo stesso numero, mentre il valore assoluto di un numero negativo è l'*opposto* del numero.

Notiamo che il valore assoluto è definito qualunque valore abbia l'argomento.
Ad esempio

- $|5| = 5$, poiché 5 è positivo;
- $|-3| = -(-3) = 3$, essendo $-3 < 0$;
- $|x^2 + 1| = x^2 + 1$ essendo la quantità $x^2 + 1$ positiva per qualunque valore di x.

Il valore assoluto ha un comportamento interessante riguardo al *segno*, infatti:

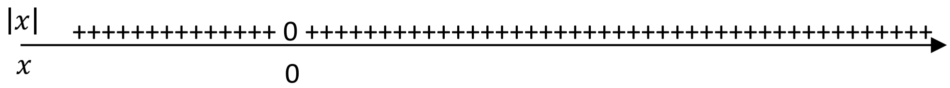
se $x > 0$ allora $|x| = x$, dunque $|x| > 0$;
se $x < 0$ allora $|x| = -x$, dunque $|x| > 0$;
se $x = 0$ allora $|0| = 0$.

Questi risultati si possono riassumere così:

$$\text{a) } |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$\text{b) } |x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Notiamo dunque che un valore assoluto *non è mai un numero negativo*.

Rappresentando graficamente il segno di $|x|$ otteniamo



Vediamo alcuni esempi:

Esempio 1.
Studiamo il segno di $|x - 3|$.
E' sufficiente chiedersi quali sono i valori di x tali che $|x - 3| > 0$. La disequazione è vera per $x \neq 3$.
Se $x = 3$ il valore assoluto è zero, per cui otteniamo

$|x-3|$ ++++++++++++++ 0 ++

x 3

Esempio 2.
Risolviamo

$$|x-5| < -7$$

Essendo il valore assoluto un numero positivo o zero, non potrà essere in particolare minore di -7; perciò $S = \emptyset$.

Esempio 3.
Risolviamo

$$|x-5| \leq 0$$

Ci chiediamo per quali valori di x la quantità $|x-5|$ è minore di zero o uguale a zero; poiché un valore assoluto non è negativo basta chiedersi quando $|x-5| = 0$. Questa uguaglianza è vera se $x = 5$, perciò $S: x = 5$.

Esempio 4.
Risolviamo

$$|x-2| > 0$$

Un valore assoluto è sempre positivo o zero; in questo caso dunque deve essere $|x-2| \neq 0$ e questo è vero se $x \neq 2$.
Dunque $S: x \neq 2$.

Esempio 5.
Risolviamo

$$|x-2| > -1$$

Poiché un valore assoluto è un numero che va da zero in poi, sarà in particolare sempre maggiore di -1; la soluzione è perciò $S: \forall x \in \mathbb{R}$.

Esempio 6.

$$\left|\frac{1}{x-3}\right| > -1$$

Non appena è possibile sostituire un numero al posto della x, la disuguaglianza sarà certamente vera; in numeri "sostituibili" (ovvero i numeri appartenenti alle CE) sono quelli diversi da tre, per cui $S: x \neq 3$.

Esercizio 1.
Studia il segno delle seguenti espressioni

a) $|x-1|$ b) $|2x-1|$

Esercizio 2.
Determina l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni

a) $|2x-4| \leq 0$ b) $|x-4| \leq 0$ c) $|x+7| < 0$ d) $|2x-3| > 0$ e) $|x-1| > -3$
f) $\left|\frac{x}{x-3}\right| > -1$ g) $\left|\frac{x}{x-3}\right| < -1$

4.4 Equazioni e disequazioni elementari con un valore assoluto

1.
Studiamo le soluzioni di equazioni del tipo

$$|x| = k$$

al variare del parametro k.

a) Se k è un numero negativo, l'equazione non ha soluzione, essendo il valore assoluto un numero mai negativo.

b) Se $k = 0$ l'equazione diventa $|x| = 0$, che ha soluzione se l'argomento è zero, dunque $S: x = 0$.
c) Per studiare la soluzione nel caso in cui k sia positivo, vediamo un caso particolare: risolviamo

$$|x| = 2$$

I numeri soluzione dell'equazione sono 2 e -2; la soluzione è pertanto $S = \{-2,2\}$.

In generale, la soluzione di $|x| = k, k > 0$ è $S = \{-k, k\}$.

2.
Studiamo le soluzioni di disequazioni del tipo

$$|x| < k,$$

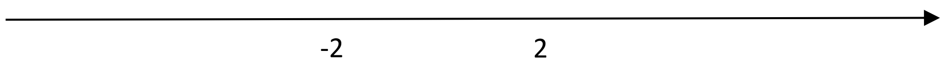
al variare del parametro k.

a) Se k è un numero negativo o zero, la disequazione non ha soluzione, essendo il valore assoluto un numero o zero o positivo.

b) Per esplorare le soluzioni nel caso in cui k sia positivo, consideriamo un esempio numerico

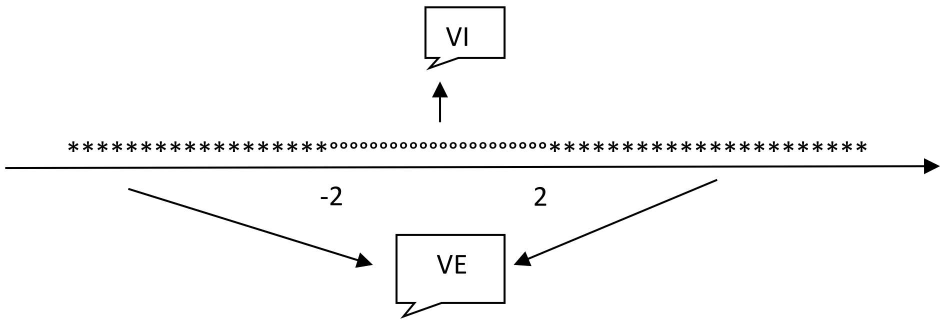
$$|x| < 2$$

Sulla retta orientata evidenziamo il numero 2 e il suo opposto -2



Sulla retta rimangono individuate *due* regioni distinte:

- i *valori interni* (VI) tra -2 e 2, costituita dai valori di x tali che $-2 < x < 2$
- i *valori esterni* (VE) tra -2 e 2, costituita dai valori di x tali che $x < -2 \vee x > 2$



Notiamo che *tutti i valori interni (VI) tra -2 e 2* sono soluzione di $|x| < 2$ (ad esempio 1; 1,8; 0; -1; -1,98); perciò $S: -2 < x < 2$.

Questo fatto vale in generale

- La soluzione di un'equazione del tipo $|x| < k, k > 0$ è costituita dai *valori interni tra –k e k*, ovvero $S: -k < x < k$.

In modo sintetico

$$|x| < k \Rightarrow \quad (VI) \ -k < x < k$$

Vediamo un esempio; risolviamo

$$|2x - 1| < 3$$

Abbiamo visto che *l'argomento* $2x - 1$ deve essere un *valore interno tra -3 e 3*, dunque dobbiamo risolvere

$$-3 < 2x - 1 < 3$$

Devono essere verificate le doppie disuguaglianze $-3 < 2x - 1$ e $2x - 1 < 3$; questo equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} -3 < 2x - 1 \\ 2x - 1 < 3 \end{cases}$$

In questo caso particolare l'argomento è un polinomio di primo grado, ed è possibile risolvere in modo più breve la doppia disequazione; otteniamo

$$-3 < 2x - 1 < 3 \Leftrightarrow -3 + 1 < 2x - 1 + 1 < 3 + 1 \Leftrightarrow -2 < 2x < 4 \Leftrightarrow -\frac{2}{2} < x < \frac{4}{2} \Leftrightarrow -1 < x < 2$$

In definitiva $S: -1 < x < 2$.

3.

Studiamo le soluzioni di disequazioni del tipo

$$|x| > k,$$

al variare del parametro *k.*

Abbiamo visto in qualche esempio precedente la soluzione se *k* è un numero negativo; ad esempio

$$|x| > -1$$

è verificata per ogni valore di x, da cui $S: \forall x \in \mathbb{R}$.
In modo simile, la disequazione

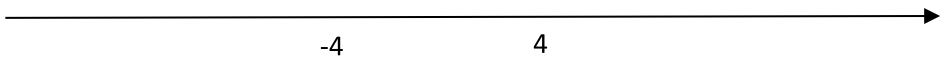
$$\left|\frac{1}{x-5}\right| > -1$$

è verificata per ogni valore di x che è *sostituibile nell'espressione,* ovvero per ogni $x \neq 5$, da cui $S: x \neq 5$.

Per studiare il caso in *k* sia un numero positivo, possiamo come prima esaminare un esempio: troviamo le soluzioni di

$$|x| > 4$$

Rappresentiamo sulla retta orientata il numero 4 e il suo opposto *-4*



Sono soluzione i numeri 5, 8, 21, 25…. così come sono soluzione i numeri -5, -9, -23 e così via. Sono soluzione tutti i numeri che sono *esterni* a -4 e 4. Abbiamo quindi

$$|x| > 4 \Rightarrow \ (VE)\ \ x < -4 \lor x > 4$$

E' facile convincersi che questo risultato vale *in generale*: ovvero le soluzioni di $|x| > k, k > 0$ sono *i valori esterni tra –k e k*; in simboli

$$|x| > k \Rightarrow \ \ (VE)\ x < -k \lor x > k$$

Vediamo un esempio; risolviamo

$$|2x - 3| > 5$$

La disuguaglianza è verificata se l'argomento è un valore esterno tra -5 e 5, dunque

$$|2x - 3| > 5 \Rightarrow \ \ (VE)\ 2x - 3 < -5 \lor 2x - 3 > 5 \Rightarrow 2x < -2 \lor 2x > 8 \Rightarrow x < -1 \lor x > 4\ .$$

La soluzione è pertanto $S: x < -1 \lor x > 4$.

Esercizio 1.
Risolvi le seguenti equazioni elementari contenenti un valore assoluto

a) $|x-3| = -2$ b) $|x-5| = 0$ c) $|x^2-9| = 0$ d) $|x^2+4| = -1$

Esercizio 2.
Risolvi le seguenti disequazioni elementari contenenti un valore assoluto

a) $|x-1| < -2$ b) $|4x-2| > -2$ c) $\left|\frac{1}{x-5}\right| > -1$ d) $|2x-3| < 1$ e) $\left|\frac{x-1}{x+2}\right| < 3$
f) $|3x-5| > 1$ g) $\left|\frac{x}{x-2}\right| > 3$

4.5 La radice quadrata

Prendiamo un numero x, maggiore di zero o uguale a zero.
Chiamiamo *radice quadrata di x,* e lo indichiamo col simbolo

$$\sqrt{x}$$

il numero *non negativo* che elevato al quadrato dà x, ovvero $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.

La quantità sotto il simbolo di radice viene detta *radicando* o *argomento.*

Osservazione.
Una radice quadrata *non è un'espressione sempre definita:* esiste solo se il radicando non è negativo.
Inoltre, *se esiste*, la radice è o zero o un numero positivo; questo segue direttamente dalla definizione.

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.
Consideriamo il simbolo $\sqrt{4}$; questa è un'espressione definita visto che 4 non è negativo; inoltre $\sqrt{4} = 2$, visto che 2 è un numero non negativo e ha per quadrato 4.

Esempio 2.
Il simbolo $\sqrt{-16}$ è un'espressione priva di senso: il radicando è negativo, e non abbiamo dato un significato a radici quadrate con argomento negativo.

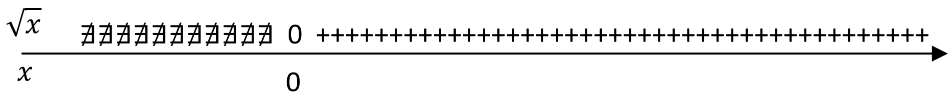
Esempio 3.
$\sqrt{0} = 0$; infatti 0 è precisamente il numero non negativo il cui quadrato è 0.

Per quanto riguarda il segno della radice possiamo dire che

$$a)\ \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$b)\ \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Ribadiamo ancora che *la radice*, *se esiste*, *non è mai un numero negativo.*

Rappresentando graficamente il segno di $\sqrt{x}$ otteniamo



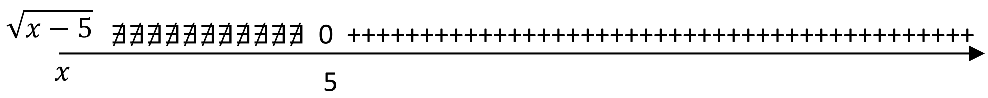
4.6 Equazioni e disequazioni elementari con una radice quadrata

Vediamo qualche semplice equazione e disequazione dove l'incognita compare al radicando; questa classe di disequazioni vengono chiamate *disequazioni irrazionali.*
Una trattazione completa di equazioni e disequazioni di questo tipo è piuttosto lunga ed elaborata e sarà trattata più approfonditamente in seguito.

Esempio 1.
Studiamo il segno di

$$\sqrt{x-5}$$

Anzitutto questo quantità è definita solo se $x - 5 \geq 0$, ovvero solo se $x \geq 5$.
Sappiamo che $\sqrt{x-5} > 0$ se $x - 5 > 0$, ovvero se $x > 5$.
Inoltre $\sqrt{x-5} = 0 \Leftrightarrow x = 5$.
Dunque, graficamente



Esempio 2.
Risolviamo

$$\sqrt{x-3} + 1 > 0$$

Ricordiamo ancora che un numero per essere soluzione deve

a) poter essere sostituito al posto della x
b) deve rendere vera la disuguaglianza.

In questo caso non è possibile sostituire ogni valore: la radice non è una quantità sempre definita; occorre che il radicando *non sia negativo*, ovvero che $x - 3 \geq 0$; questo avviene per $x \geq 3$.
Sotto questa condizione la radice è definita ed è una quantità maggiore o uguale a zero; sommata ad 1 otteniamo una quantità sempre positiva.
La soluzione è pertanto $S: x \geq 3$.

Esempio 3.
Risolviamo

$$\sqrt{x-5} \leq 0$$

Notiamo anzitutto che una radice, *se esiste*, è una quantità positiva o nulla. Quindi affinché la disequazione è verificata è necessario e sufficiente che valga

$$\sqrt{x-5} = 0$$

La radice è nulla se e solo se il radicando è nulla, perciò $S: x = 5$.

Esempio 4.
Risolviamo

$$\frac{1}{\sqrt{x-2}} \geq 0$$

Ci chiediamo per quali valori di x la frazione $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ è uguale a zero o positiva; sappiamo che una frazione è zero solo se il numeratore è zero.
In questo caso, per ogni valore che si attribuisce a x vediamo che il numeratore è costante e uguale a 1: dunque la frazione non sarà mai zero.
La disequazione si riduce quindi a

$$\frac{1}{\sqrt{x-2}} > 0$$

Non tutti i valori dell'incognita sono ammissibili: la radice deve esistere (dunque il radicando non deve essere negativo) ed, essendo un denominatore, non deve essere zero (dunque il radicando non deve essere zero).
Le condizioni di esistenza CE devono perciò rispettare la condizione $x - 2 > 0$, da cui $x > 2$.
Sotto questa condizione la radice esiste ed è positiva; essendo il rapporto fra due quantità positive un numero positivo, deduciamo che le $x > 2$ sono anche la soluzione della disequazione. In definitiva $S: x > 2$.

Esempio 5.
Risolviamo

$$\sqrt{x-1} > -5$$

La radice è sempre una quantità o zero, o maggiore di zero; dunque, <u>se esiste</u>, la disequazione è verificata. La radice esiste se $x - 1 \geq 0$, dunque $S: x \geq 1$.

Esempio 6.
Risolviamo

$$\sqrt{x^2+1} > 0$$

La radice esiste per ogni valore di x, essendo il radicando la somma fra un quadrato (x^2) e un numero positivo (1). In particolare il radicando è un numero positivo, dunque la radice è positiva (e *non zero!*).
La disequazione è verificata per ogni valore di x, quindi $S = \mathbb{R}$.

Esempio 7.
Risolviamo

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} \geq 0$$

Poiché le radici, se esistono, sono quantità o zero o positive, la disequazione è vera se le radici sono definite; questo avviene se $x - 3 \geq 0$ e se $5 - x \geq 0$. La soluzione della disequazione coincide quindi con la soluzione del sistema

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases}$$

La prima disequazione è vera se $x \geq 3$ e la seconda per $x \leq 5$; perciò $S: 3 \leq x \leq 5$.

Esempio 8.
Risolviamo

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1} \leq 0$$

Ci chiediamo per quali valori di x la somma di due radici è negativa o nulla. La somma di due quantità maggiori o uguali a zero non può essere negativa, dunque cerchiamo – se esistono – i valori di x per cui

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1} = 0$$

La somma di due radici è zero solo se entrambe le radici sono zero; questo accade solo se entrambi i radicandi sono nulli. Basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} x-1 = 0 \\ x^2-1 = 0 \end{cases}$$

La prima equazione ha per soluzione 1, la seconda ± 1; la soluzione è quindi $S: x = 1$.

Esercizio.
Rappresenta graficamente il segno di

a) $\sqrt{1-x}$ b) $\sqrt{x^2-4}$ c) $\sqrt{\frac{2}{x-4}}$

Determina l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni

a) $\sqrt{\frac{x}{x-4}} + 3 > 0$ b) $\sqrt{x+2} > 0$ c) $\sqrt{x^2+x+1} \geq 0$ d) $\sqrt{x^2-x} \leq 0$

e) $\frac{1}{\sqrt{x+2}} \geq 0$ f) $\sqrt{x-3} > -1$ g) $\sqrt{x^2+1} > -4$ h) $\sqrt{\frac{x}{x+6}} > -1$

i) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-5} > 0$ l) $\sqrt{x-2} + \sqrt{2-x} \leq 0$

Sappiamo che i numeri sono di *tre* tipi: i numeri *negativi* (quelli minori di zero), i numeri *positivi* (quelli maggiori di zero) e lo zero (ovviamente, né positivo, né negativo).

Abbiamo visto tre espressioni che hanno un comportamento speciale riguardo al segno: i quadrati, i valori assoluti e le radici. Queste espressioni possono essere solo zero o positive.
Questa particolarità porta ad usare strategie particolari nello studio delle espressioni che li contengono: vediamo alcuni esempi.

4.7 Alcune disequazioni che contengono quadrati, valori assoluti o radici

Esempio 1.
Risolviamo

$$\frac{1}{|x|} > 1$$

Il $|x|$ abbiamo visto che è una quantità speciale riguardo al segno: o è nullo, o positivo. I valori per cui si annulla non sono sostituibili, visto che annullano il denominatore; sia dunque CE: $x \neq 0$.
Sotto questa condizione $|x|$ è positivo: è lecito quindi moltiplicare per $|x|$ ambo i membri, ottenendo

$$|x| \cdot \frac{1}{|x|} > 1 \cdot |x|$$

da cui

$$1 > |x|$$

ovvero

$$|x| < 1$$

Sappiamo che questa disuguaglianza è verificata per i valori interni VI: perciò

$$-1 < x < 1$$

Ricordando le CE otteniamo

$$S: -1 < x < 1 \wedge x \neq 0$$

O, analogamente

$$S: -1 < x < 0 \vee 0 < x < 1.$$

Esempio 2.
Risolviamo

$$\frac{x-1}{(x-3)^2} > 0$$

Nell'espressione compare il quadrato $(x-3)^2$, che sappiamo essere solo o zero o positivo.

- Il numero *3* non può essere sostituito nell'espressione, perché la renderebbe priva di senso ($\frac{3-1}{(3-3)^2}$ non è definita): il numero *3* certamente non è soluzione.
- Risolviamo dunque la disequazione assumendo che $x \neq 3$: per questi valori di x la quantità $(x-3)^2$ è positiva, ed è perciò possibile moltiplicare ambo i membri per $(x-3)^2$ ottenendo

$$(x-3)^2 \cdot \frac{x-1}{(x-3)^2} > 0 \cdot (x-3)^2$$

dunque

$$x - 1 > 0$$

da cui

$$x > 1$$

La soluzione è pertanto $S: x > 1 \wedge x \neq 3$.

Esempio 3.
Risolviamo

$$\frac{x-1}{|x-3|} > 0$$

Si ragiona in modo simile all'esempio 1; il numero *3* non è soluzione. Per i valori di $x \neq 3$ osserviamo che la quantità $|x-3|$ è positiva, e moltiplicando entrambi i membri otteniamo

$$|x-3| \cdot \frac{x-1}{|x-3|} > 0 \cdot |x-3|$$

da cui

$$x - 1 > 0$$

ovvero $x > 1$; pertanto $S: x > 1 \wedge x \neq 3$.

Esempio 4.
Risolviamo

$$\frac{x-1}{\sqrt{x-3}} > 0$$

- Vediamo quali sono i valori sostituibili al posto della x; affinché la radice sia definita occorre che $x - 3 \geq 0$ e affinché la frazione sia definita è necessario che $x - 3 \neq 0$, dunque le CE dell'espressione sono le x tali che $x - 3 > 0$, ovvero $x > 3$.
- Dunque cerchiamo la soluzione fra le x maggiori di tre.
  Sotto questa condizione $\sqrt{x-3}$ è una quantità positiva; moltiplicando entrambi i membri otteniamo

$$\sqrt{x-3} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x-3}} > 0 \cdot \sqrt{x-3}$$

ovvero

$$x - 1 > 0$$

e, infine

$$x > 1$$

Un numero affinché sia soluzione deve verificare la condizione (CE) $x > 3$ e $x > 1$, dunque deve essere soluzione del sistema

$$\begin{cases} x > 3 \\ x > 1 \end{cases}$$

Perciò $S: x > 3$.

Esempio 5.
Risolviamo

$$\frac{|x-5|}{x-2} \leq 0$$

La quantità "speciale" per il segno è il valore assoluto, che sappiamo non essere mai negativo. Se fosse positivo potremmo eliminarlo; ma questo non è sempre vero e dobbiamo trattare a parte il caso in cui $|x-5| = 0$, cioè $x = 5$.
Il numero *5* è una soluzione, poiché può essere sostituito nella disequazione e la rende vera.

Dunque $5 \in S$.
Lavoriamo ora con le $x \neq 5$; sotto questa condizione otteniamo

$$\frac{1}{|x-5|} \cdot \frac{|x-5|}{x-2} \leq 0 \cdot \frac{1}{|x-5|}$$

dunque

$$\frac{1}{x-2} \leq 0$$

Abbiamo già visto una situazione simile: affinché la disequazione sia verificata è necessario e sufficiente che $x-2<0$, ovvero che $x<2$. Ricordando che abbiamo mostrato che *5* è una soluzione abbiamo infine

$$S: x<2 \vee x=5.$$

Esempio 6.
Risolviamo

$$\frac{|x-7| \cdot (x-5)^2}{\sqrt{6-x}} \leq 0$$

Abbiamo le tre espressioni "speciali": valore assoluto, radice e quadrato. I valori sostituibili (quelli delle CE) sono le x tali che $6-x>0$, ovvero CE: $x<6$.
Sotto queste condizioni $\sqrt{6-x}$ è positiva e moltiplicando ambo i membri otteniamo

$$|x-7| \cdot (x-5)^2 \leq 0$$

Per i valori delle CE, $|x-7|$ non è zero: è dunque positivo, e moltiplicando per l'inverso si ottiene

$$(x-5)^2 \leq 0$$

che è vera per $x=5$; il numero *5 è anche soluzione*, essendo un valore "sostituibile" (cioè appartenente alle CE).

Esempio 7.
Risolviamo

$$(|x|+1) \cdot \frac{|x-3|-4}{\sqrt{x-5}} \leq 0$$

Anzitutto $(|x|+1)$ è positiva per qualunque assegnazione di x: dunque, moltiplicando per l'inverso

$$\frac{1}{|x|+1} \cdot (|x|+1) \cdot \frac{|x-3|-4}{\sqrt{x-5}} \leq 0 \cdot \frac{1}{|x|+1}$$

da cui

$$\frac{|x-3|-4}{\sqrt{x-5}} \leq 0$$

I valori delle x sostituibili (cioè i valori delle CE) sono le x tali che $x-5>0$; perciò CE: $x>5$.
Sotto queste condizioni, moltiplicando per $\sqrt{x-5}$ i termini della disuguaglianza si ottiene

$$|x-3|-4 \leq 0$$

Questa disequazione è facilmente risolubile isolando il modulo sommando 4 ad entrambi i membri, prendendo poi i valori interni. In questo caso, tuttavia, siamo fortunati: dalle CE sappiamo che sono sostituibili solo le $x > 5$; questi valori rendono l'argomento del valore assoluto positivo, perciò $|x-3| = x-3$ e la disequazione si può scrivere

$$x-3-4 \leq 0$$

e, risolvendo

$$x \leq 7$$

I numeri che stanno nelle CE e che soddisfano questa condizione sono soluzione della disequazione; risolvendo

$$\begin{cases} x > 5 \\ x \leq 7 \end{cases}$$

si ottiene la soluzione $S: 5 < x \leq 7$.

Esistono delle particolari disequazioni di grado superiore al secondo, che vogliamo ricordare:

4.8 Disequazioni binomie, trinomie e biquadratiche

Disequazioni binomie

Chiamiamo *disequazioni binomie* tutte le disequazioni riconducibili a una forma del tipo

$$x^n \gtreqless k \text{ dove } n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \text{ e } k \in \mathbb{R}$$

Sono disequazioni binomie, ad esempio $x^3 < 9$, $x^4 \geq -81$ e $x^5 + 5 > 0$.

La risoluzione per questa tipologia di disequazioni dipende da *n.*

Se *n è dispari*, la soluzione di $x^n \lesseqgtr k$ è data da $x \lesseqgtr \sqrt[n]{k}$.

La radice cubica, infatti, conserva la relazione d'ordine.

Esempio 1.
Risolviamo

$$x^3 < -1$$

La soluzione è $x < \sqrt[3]{-1}$, ovvero $S: x < -1$.

Esempio 2.
Risolviamo

$$x^5 \geq 2$$

La soluzione è

$$S: x \geq \sqrt[5]{2}$$

Se n è pari, la soluzione di $x^n \lesseqgtr k$ dipende dal segno di k.

- Se $k < 0$ la disequazione $x^n \lesseqgtr k$ è *sempre vera o mai vera,* visto che x^n *non ha valori negativi.*

Esempio 1.
La disequazione $x^4 > -1$ è sempre verificata: $S = \mathbb{R}$.

Esempio 2.
La disequazione $x^6 < -4$ non è mai verificata: $S = \emptyset$.

- Se $k > 0$

- la soluzione di $x^n > k$ è data dai *valori esterni fra* $-\sqrt[n]{k}$ e $\sqrt[n]{k}$

- la soluzione di $x^n < k$ è data dai *valori interni fra* $-\sqrt[n]{k}$ e $\sqrt[n]{k}$

La soluzione esiste sempre se l'esponente *n* è dispari, mentre l'equazione può non essere mai vera se l'esponente è pari.

Vediamo qualche esempio.

Esempio 1.
Risolviamo

$$x^3 < 16$$

L'esponente è dispari, dunque $S: x < \sqrt[3]{16}$, da cui $S: x < 2\sqrt[3]{2}$.

Esempio 2.
Risolviamo

$$x^4 > -1$$

Poiché ogni numero alla quarta è o *zero o positivo*, in particolare è maggiore di -1 per ogni valore di x.

Esempio 3.
Risolviamo

$$x^6 - 4 > 0$$

Questa è riconducibile a $x^6 > 4$, che è verificata per *valori esterni a* $-\sqrt[6]{4}$ e $\sqrt[6]{4}$.

Dunque

$$S: x < -\sqrt[6]{4} \vee x > \sqrt[6]{4}$$

e, infine, $S: x < -\sqrt[3]{2} \vee x > \sqrt[3]{2}$.

Esempio 4.
Risolviamo

$$x^4 - 16 \leq 0$$

La disequazione si può scrivere come

$$x^4 \leq 16$$

Le soluzioni sono i valori interni tra $-\sqrt[4]{16}$ e $\sqrt[4]{16}$, dunque $S: -\sqrt[4]{16} \leq x \leq \sqrt[4]{16}$.

Disequazioni trinomie e biquadratiche

Chiamiamo *disequazioni trinomie* le disequazioni esprimibili nella forma

$$ax^{2n} + bx^n + c \lesseqgtr 0 \text{ dove } n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

Sono esempi di equazioni trinomie $x^6 + 5x^3 - 4 \lesseqgtr 0$, $-2x^4 + x^2 + 1 \lesseqgtr 0$ e $x^{30} + 3x^{15} \lesseqgtr 3$.

Il caso particolare in cui $n = 2$, ovvero l'equazione

$$ax^4 + bx^2 + c \lesseqgtr 0$$

viene detta equazione *biquadratica*.

Le disequazioni trinomie possono essere risolte grazie a una *opportuna sostituzione:* vediamo qualche esempio.

Esempio 1.
Risolviamo

$$x^6 - 9x^3 + 8 \leq 0$$

Osserviamo che, visto che $x^6 = (x^3)^2$ la disequazione diventa

$$(x^3)^2 - 9x^3 + 8 \leq 0$$

che può essere interpretata come una disequazione di *secondo grado: chiamando infatti* $y = x^3$ si può scrivere

$$y^2 - 9y + 8 \leq 0$$

Essendo una disequazione di grado *due*, dobbiamo risolvere l'equazione associata

$$y^2 - 9y + 8 = 0$$

Le soluzioni sono $y = 1 \vee y = 8$, per cui la disequazione ha per soluzione i *valori interni*

$$1 \leq y \leq 8$$

Ricordando che $y = x^3$

$$1 \leq x^3 \leq 8$$

e, applicando la radice cubica alle tre quantità (che non modifica la relazione d'ordine) otteniamo la soluzione finale $S: 1 \leq x \leq 2$.

Esempio 2.
Risolviamo

$$x^4 - 3x^2 - 4 \leq 0$$

La disequazione si può scrivere come

$$(x^2)^2 - 3x^2 - 4 \leq 0$$

e, chiamando $y = x^2$ otteniamo

$$y^2 - 3y - 4 \leq 0$$

che è una disequazione di secondo grado; l'equazione associata $y^2 - 3y - 4 = 0$ ha per soluzione -1 e 4: le soluzioni della *disequazione* sono i *valori interni,* dunque

$$-1 < y < 4$$

e, ricordando che $y = x^2$

$$-1 < x^2 < 4$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} x^2 > -1 \\ x^2 < 4 \end{cases}$$

La prima condizione è sempre verificata; la seconda è una disequazione di secondo grado, le cui soluzioni dell'equazione associata sono -2 e $+2$. Le soluzioni sono date dai *valori interni*, perciò $-2 < x < 2$, che è anche la soluzione del sistema e della disequazione iniziale dunque

$$S: -2 < x < 2$$

Esempio 3.
Risolviamo

$$x^4 - 10x^2 + 9 > 0$$

Possiamo scrivere

$$(x^2)^2 - 10x^2 + 9 > 0$$

e, chiamando $y = x^2$

$$y^2 - 10y + 9 > 0$$

L'equazione associata ha per soluzioni 1 e 9; la disequazione ha per soluzioni i *valori esterni*, dunque

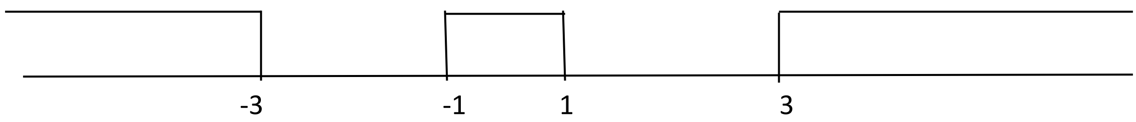
$$y < 1 \vee y > 9$$

perciò

$$x^2 < 1 \vee x^2 > 9$$

La disequazione $x^2 < 1$ ha per soluzione $S_1: -1 < x < 1$, mentre la disequazione $x^2 > 9$ ha per soluzione $S_2: x < -3 \vee x > 3$.

La soluzione della disequazione di partenza deve contenere *sia* le x in S_1 *che* le x in S_2: graficamente abbiamo



dunque la soluzione finale è data da

$$S: x < -3 \vee -1 < x < 1 \vee x > 3$$

Esercizio.

Risolvi le seguenti disequazioni.

a) $x^4 + 1 \geq 0$ b) $x^3 + 1 \geq 0$ c) $x^4 - 1 \geq 0$ d) $x^3 - 1 \geq 0$ e) $x^6 - 2x^3 + 1 \leq 0$

f) $(1 - \sqrt{2})x^4 > 0$ g) $(x^2 - 2)^5 > 0$ h) $4x^8 + 1 > 0$ i) $x^4 - x^2 + 2 > 0$

4.9 Disequazioni di vario tipo

Ricordiamo il seguente risultato, che riguarda la conservazione della uguaglianza, dell'essere minore e dell'essere maggiore fra i numeri non negativi.

Proposizione.

Siano a, b due numeri *non negativi;* allora

- a) dire che $a = b$ è equivalente a dire che $a^2 = b^2$
- b) dire che $a < b$ è equivalente a dire che $a^2 < b^2$

Dunque la relazione di uguaglianza fra due quantità, sotto la condizione che le quantità non siano negative, è sostituibile con la relazione fra i quadrati, e viceversa.

Stesso discorso per la relazione di "$<$" e di "$>$": se abbiamo due quantità *non negative* dove una è minore (o maggiore) dell'altra, questa relazione *si conserva ai quadrati*, anzi la relazione sui quadrati è equivalente a quella sulle basi.

Diamo una dimostrazione del punto b).

Siano dunque $a, b \geq 0$; mostriamo che l'affermazione "$a^2 < b^2$" è equivalente a "$a < b$".

Anzitutto a e b non possono essere entrambi nulli; sotto questa condizione

$a^2 < b^2 \Leftrightarrow b^2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow (b+a)(b-a) > 0 \Leftrightarrow$ (essendo $b+a$ positivo)

$\Leftrightarrow b - a > 0 \Leftrightarrow b > a \Leftrightarrow a < b$.

Osservazione.

L'ipotesi che i numeri non siano negativi è essenziale, perché la relazione fra due numeri e i rispettivi quadrati non si conserva sempre fra due numeri *qualunque*: ad esempio $-3 < 1$, ma $(-3)^2 \nless 1^2$.

Questa proposizione ci consente di risolvere equazioni e disequazioni in cui compaiono quantità non negative: vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.
Risolviamo

$$|x-1| < \sqrt{x+3}.$$

Osserviamo anzitutto che *non tutti i valori sono sostituibili*: le x sostituibili sono quelle che danno un senso alla scrittura. Occorre dunque che

$$CE: x + 3 \geq 0 \Longrightarrow x \geq -3$$

Fra questi, cercheremo i valori che rendono vera la relazione (sempreché esistano!).

Ora:

- il valore assoluto è una quantità mai negativa
- la radice quadrata (quando esiste) non è mai negativa

Abbiamo visto che una certa relazione di ordine fra quantità non negative *è logicamente equivalente (dunque sostituibile) con i rispettivi quadrati*; otteniamo dunque

$$(x-1)^2 < \left(\sqrt{x+3}\right)^2$$

Con facili conti

$$x^2 - 2x + 1 < x + 3 \Longrightarrow x^2 - 3x - 2 < 0$$

L'equazione associata ha due soluzioni date da $x_{1,2} = \frac{3 \mp \sqrt{17}}{2}$. La soluzione della disequazione è data dai valori interni, dunque $\frac{3-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{17}}{2}$.

Confrontando con le CE

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ \dfrac{3-\sqrt{17}}{2} < x < \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

si ottiene

$$S: \frac{3-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{17}}{2}$$

Esempio 2.
Risolviamo

$$\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x^2+x}$$

Le soluzioni sono da cercarsi tra i valori sostituibili, ovvero quelli che stanno nelle CE; sono ottenute da

$$CE \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2+x \geq 0 \end{cases}$$

da cui $CE: x \geq 0$.

Per questi valori abbiamo dunque un confronto fra due *radici, che sono quantità mai negative*: possiamo dunque sostituire la relazione fra le quantità $\sqrt{x+1}$ e $\sqrt{x^2+x}$ con quella fra i rispettivi quadrati, ottenendo

$$x+1 \geq x^2+x$$

Con rapidi conti otteniamo $x^2 \leq 1$, che è una disequazione di secondo grado: le soluzioni dell'equazione associata sono *-1* e *1*. Prendendo i valori interni avremo per soluzione

$-1 \leq x \leq 1$.

Fra questi valori, dobbiamo scegliere quelli che stanno nelle CE; questo equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

e, infine, $S: 0 \leq x \leq 1$.

Esercizio.
Risolvi le seguenti disequazioni.

a) $\sqrt{x-1} < |x|$ b) $\sqrt{x+3} > \sqrt{x}$ c) $|x| > x$ d) $\sqrt{|x|} > x$ e) $\sqrt{x} > x$ f) $\sqrt{|x|+1} > 2$

4.10 Disequazioni con valori assoluti: approfondimento

Abbiamo già definito il valore assoluto di un numero e sappiamo risolvere disequazioni del tipo

$$|f(x)| \lesseqgtr k, k \in \mathbb{R}.$$

Ricordiamo che:

se k è un numero negativo,

- $|f(x)| < k$ non ha soluzione
- $|f(x)| > k$ è verificata qualunque sia il numero sostituibile al posto della x;

se k è un numero positivo,

- $|f(x)| < k$ è verificata per i *valori interni* fra $-k$ e k, ovvero

$$|f(x)| < k \Leftrightarrow -k < f(x) < k$$

- $|f(x)| > k$ è verificata per i *valori esterni* fra $-k$ e k, ovvero

$$|f(x)| < k \Leftrightarrow f(x) < -k \vee f(x) > k$$

Questo risultato si può estendere al caso in cui al posto del numero k ci sia una quantità che dipende da x, ovvero alle situazioni del tipo $|f(x)| < g(x)$ e $|f(x)| > g(x)$, dove $f(x)$ e $g(x)$ sono quantità che possono dipendere da x.

In particolare:

- $|f(x)| < g(x)$ è verificata per i valori di x *interni (VI),* ovvero per le x tali che

$$-g(x) < f(x) < g(x);$$

- $|f(x)| > g(x)$ è verificata per i valori di x *esterni (VE),* ovvero per le x tali che

$$f(x) < -g(x) \vee f(x) > g(x)$$

Vediamo qualche esempio.

Esempio 1.
Risolviamo

$$|x| < x + 1.$$

Questa disuguaglianza abbiamo detto che è verificata per i *valori interni*, ovvero per le x tali che

$$-(x+1) < x < x + 1$$

ovvero

$$-x - 1 < x < x + 1$$

Questa doppia disequazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x > -x - 1 \\ x < x + 1 \end{cases}$$

La seconda disuguaglianza è sempre verificata, mentre la soluzione della prima è $x > -\frac{1}{2}$, che sarà dunque anche la soluzione della disequazione iniziale.

Esempio 2.

Risolviamo

$$|x^2 - 2x| > x^2$$

La soluzione è data dai *valori esterni,* ovvero dalle x tali che

$$x^2 - 2x < -x^2 \vee x^2 - 2x > x^2$$

Chiamiamo

- S_1 l'insieme delle soluzioni di $x^2 - 2x < -x^2$
- S_2 l'insieme delle soluzioni di $x^2 - 2x > x^2$.

La soluzione della disequazione $|x^2 - 2x| > x^2$ è l'insieme S dei numeri che sono soluzione o della prima o della seconda disequazione, ovvero $S = S_1 \cup S_2$.

Da $x^2 - 2x < -x^2$ segue $2x^2 - 2x < 0$; le soluzioni dell'equazione associata sono *0* e *1*. Prendendo i valori interni otteniamo

$$S_1: 0 < x < 1$$

Da $x^2 - 2x > x^2$ segue $-2x > 0$ perciò $S_2: x < 0$.

La soluzione S è costituita quindi dai *numeri tra 0 e 1 e dai numeri negativi* ovvero

$$S: x < 0 \wedge 0 < x < 1$$

o, equivalentemente

$$S: x < 1 \wedge x \neq 0$$

Esercizio.

Risolvi le seguenti disequazioni.

a) $|x| \leq x$ b) $|x + 1| + x > 1$ c) $x^2 - |x| - 12 < 0$ d) $2 - x \geq |3x - 1|$

e) $|x^2 - 1| > 2x$ f) $|x + 1| + \frac{1}{2x} > 0$ g) $x|x| < 1$

4.11 Le disequazioni irrazionali

Chiamiamo disequazioni irrazionali disequazioni in cui l'incognita compare all'interno di un radicando.

E' un'equazione irrazionale, ad esempio, $2 + \sqrt{x - 3} > x + 1$ mentre *non è un'equazione irrazionale* $\sqrt{2}x + 1 > x - 3$.

In questa sede tratteremo solo alcuni tipi di disequazioni irrazionali.

Cerchiamo di trovare le condizioni che devono soddisfare le soluzioni di equazioni del tipo

$$(\blacksquare)\ \sqrt{f(x)} < g(x)$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono quantità che possono dipendere da una variabile *x*.

Ora: ricordiamo che una soluzione di una disequazione deve

- poter essere sostituita al posto della incognita
- rendere vera la relazione

Dunque: affinché un numero x possa essere sostituito è necessario che $f(x) \geq 0$.

Analizziamo la quantità $g(x)$: può essere, in generale, negativa o non negativa.

Se $g(x) < 0$ la disequazione (■) non può essere vera perché una radice (essendo per definizione ≥ 0) non può essere minore di una quantità negativa.

Se $g(x) \geq 0$ confrontiamo due quantità ($\sqrt{f(x)}$ e $g(x)$) *non negative*: dunque possiamo passare ai quadrati ottenendo

$$(\blacksquare\blacksquare) f(x) < [g(x)]^2$$

In definitiva, abbiamo mostrato che un numero è soluzione della disequazione

$$\sqrt{f(x)} < g(x)$$

se e solo se è soluzione del sistema

$$S: \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$$

Cerchiamo le condizioni sulle soluzioni di

$$(\square)\ \sqrt{f(x)} > g(x)$$

Come nel caso precedente: un numero può essere sostituito al posto di x se l'espressione è definita, perciò dobbiamo richiedere che $f(x) \geq 0$.

Analizziamo ora la quantità $g(x)$.

- se $g(x) < 0$ allora la disequazione (☐) è verificata, essendo la radice un numero o zero o positivo, dunque certamente più grande di un numero negativo.

  Sono dunque soluzioni i numeri che sono soluzione del sistema

$$S_1: \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

- se $g(x) \geq 0$ la disequazione (☐) *non* è necessariamente verificata; in questo caso, però, abbiamo un confronto fra numeri non negativi. E' possibile quindi sostituire la disequazione $\sqrt{f(x)} > g(x)$ con la relazione ottenuta passando ai quadrati: $f(x) > [g(x)]^2$.

Sono dunque soluzioni i numeri che sono soluzione del sistema

$$S_2: \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$$

Nel sistema S_2 la condizione $f(x) \geq 0$ si può omettere grazie alla condizione

$f(x) > [g(x)]^2$: se $f(x)$ è maggiore di un quadrato, infatti, è necessariamente non negativa.

Quindi un numero è soluzione di

$$f(x) > [g(x)]^2$$

se e solo se è soluzione di

$$S_1: \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \vee S_2: \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$$

ovvero $S = S_1 \cup S_2$.

Esempio 1.
Risolviamo

$$\sqrt{x-1} - 3 < 0$$

Isoliamo la radice

$$\sqrt{x-1} < 3$$

I valori sostituibili sono le x tali che $x \geq 1$. Sotto questa condizione abbiamo il confronto fra due quantità *non negative* e si può passare ai quadrati ottenendo

$$x - 1 < 9$$

da cui $x < 10$. Confrontando questo risultato con le *CE*, ovvero risolvendo

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x < 10 \end{cases}$$

si ottiene $S: 1 \leq x \leq 10$.

Esempio 2.
Risolviamo

$$\sqrt{10-5x} < 8 + x$$

Dobbiamo cercare i valori di x tali che $10 - 5x \geq 0$, affinché la radice esista. Se $8 + x$ fosse negativo non potremmo avere soluzione: richiediamo perciò che $8 + x \geq 0$. Sotto queste condizioni - avendo un confronto fra quantità non negative – è possibile passare ai quadrati ottenendo $10 - 5x < (8 + x)^2$.

Risolviamo dunque il sistema

$$\begin{cases} 10 - 5x \geq 0 \\ 8 + x \geq 0 \\ 10 - 5x < (8 + x)^2 \end{cases}$$

I) $10 - 5x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$

II) $8 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -8$

III) $10 - 5x < (8 + x)^2 \Rightarrow 10 - 5x < 64 + 16x + x^2 \Rightarrow x^2 + 21x + 54 > 0 \Rightarrow x < -18 \vee x > -3$

Confrontando le soluzioni delle tre disequazioni e prendendo i valori comuni otteniamo

$$S =]-3,2]$$

Esempio 3.
Risolviamo

$$\sqrt{1-2x} - x > 0$$

Isoliamo la radice

$$\sqrt{1-2x} > x$$

Un numero è soluzione della disequazione se è soluzione del sistema

$$S_1: \begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

o del sistema

$$S_2: \begin{cases} x \geq 0 \\ 1-2x < x^2 \end{cases}$$

in altri termini la soluzione di $\sqrt{1-2x} > x$ è l'insieme $S = S_1 \cup S_2$.

La soluzione del primo sistema è immediata: $S_1: x < 0$.

Per determinare S_2 risolviamo $1 - 2x < x^2$.

Mettendo in forma normale abbiamo $x^2 + 2x - 1 > 0$; l'equazione associata ha soluzioni $-1 \pm \sqrt{2}$ e, prendendo i valori interni otteniamo $-1-\sqrt{2} < x < -1+\sqrt{2}$.

La soluzione del secondo sistema è pertanto $S_2: 0 \leq x < -1+\sqrt{2}$.

La soluzione di $\sqrt{1-2x} > x$ è l'unione tra S_1 e S_2 dunque

$$S: x < -1+\sqrt{2}$$

Con le considerazioni che abbiamo precedentemente sviluppato, siamo in grado di risolvere disequazioni che non rientrano necessariamente negli schemi visti; vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.
Risolviamo

$$\sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2-x}$$

Una soluzione deve far parte delle *CE*, dunque deve essere soluzione del sistema

$$CE \begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x^2-x \geq 0 \end{cases}$$

- $x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$;
- $x^2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \vee x \geq 1$

perciò $CE: x \leq -1 \vee x \geq 1$

Sotto queste condizioni, osserviamo che abbiamo un confronto fra quantità non negative (sappiamo che le radici sono quantità non negative per definizione) dunque possiamo sostituire la disuguaglianza di partenza con la relazione sui quadrati, ottenendo

$$x^2 - 1 < x^2 - x$$

dunque $x < 1$.

Confrontando con le CE, infine,

$$S: x \leq -1$$

Esempio 2.
Risolviamo

$$(\boxtimes)\ \sqrt{x+3} > |x+1|$$

Le condizioni di esistenza della disequazione (ossia i "valori sostituibili") sono le x tali che

$x + 3 \geq 0$, dunque

$$CE: x \geq -3$$

Sotto questa condizione il primo membro ha senso e, essendo una radice, non è negativo; neppure il secondo membro può essere negativo, essendo un modulo.

Possiamo dunque passare ai quadrati, ottenendo

$$x + 3 > (x+1)^2$$

con rapidi conti otteniamo

$$x^2 + x - 2 < 0$$

Le soluzioni dell'equazione associata sono *-2* e *1,* dunque $x^2 + x - 2 < 0$ è vera se

$x \in]-2, -1[$.

Per ottenere la soluzione di ($\boxtimes$) dobbiamo confrontare questi valori con le CE

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \in]-2, -1[\end{cases}$$

ottenendo, infine,

$$S:\ -2 < x < -1$$

Esempio 3.
Risolviamo

$$\sqrt{|x|} < x - 1$$

Anzitutto sono ammissibili tutti i valori di x, essendo il radicando mai negativo.

Se $x - 1$ fosse negativo non avremmo soluzione; richiediamo dunque che $x - 1 \geq 0$ ovvero $x \geq 1$.

Abbiamo sotto questa condizione un confronto fra quantità non negative: passando ai quadrati otteniamo

$$|x| < (x-1)^2$$

Questa disequazione la sappiamo trattare (si prendono i valori interni) ma in questo caso la trattazione è estremamente più comoda.

Sappiamo che dobbiamo prendere le x maggiori o uguali a uno: sotto questa condizione vale $|x| = x$, dunque $|x| < (x-1)^2$ diviene

$$x < (x-1)^2$$

e, con semplici conti

$$x^2 - 3x + 1 > 0$$

la cui soluzione è $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Confrontandola con la condizione $x \geq 1$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

ottenendo, infine, la soluzione $S = \left[1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$.

4.12 Le disequazioni fratte irrazionali e con valore assoluto

Vediamo come si possono risolvere disequazioni fratte con l'incognita che compare nell'argomento di una radice o di un modulo.

Il seguente esempio, che commentiamo, può fornire indicazioni per casi analoghi.

Risolviamo

$$\frac{\sqrt{3x+4} - 4 + 2x}{|x-1| - 3} \geq 0$$

Anzitutto occupiamoci delle condizioni di esistenza: queste sono la soluzione di

$$CE \begin{matrix} a) \\ b) \end{matrix} \begin{cases} 3x + 4 \geq 0 \\ |x-1| - 3 \neq 0 \end{cases}$$

La condizione a) ha soluzione $x \geq -\frac{4}{3}$.

Da $|x-1| - 3 \neq 0$ segue $|x-1| \neq 3$ da cui $x \neq 4 \vee x \neq -2$.

Perciò

$$CE: x \geq -\frac{4}{3} \wedge \mathrm{x} \neq 4$$

A questo punto studiamo il segno del numeratore e del denominatore, per poi confrontarli.

Per conoscere il segno di un'espressione è – in linea di principio – indifferente chiedersi se è positiva o negativa. Se l'espressione è un polinomio i calcoli per sapere se è positivo o negativo sono in genere della stessa complessità, dunque in genere ci chiediamo la positività.

Se dobbiamo studiare il segno di una espressione irrazionale, i calcoli per individuare la positività o per la negatività possono avere una complessità differente.

In questo caso, ad esempio, se ci chiediamo per quali valori di x il numeratore è positivo otteniamo la disequazione

$x: N > 0 \Longrightarrow \sqrt{3x+4} > 4 - 2x$

Sappiamo che per risolverla dobbiamo dobbiamo determinare l'unione di *due* sistemi.

Chiediamoci, invece,

$x: N < 0 \Longrightarrow \sqrt{3x+4} < 4 - 2x$ la cui soluzione è data dal sistema

$$\begin{cases} 3x + 4 \geq 0 \\ 4 - 2x \geq 0 \\ 3x + 4 < 16 + 4x^2 - 16x \end{cases}$$

- $3x + 4 \geq 0 \Longrightarrow x \geq -\frac{4}{3}$
- $4 - 2x \geq 0 \Longrightarrow x \leq 2$
- $3x + 4 < 16 + 4x^2 - 16x \Longrightarrow 4x^2 - 19x + 12 > 0 \Longrightarrow x < \frac{3}{4} \vee x > 4$

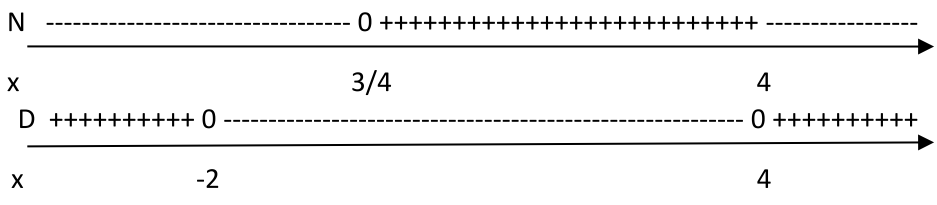
Confrontando le tre condizioni otteniamo la soluzione del sistema: $N < 0 \Longrightarrow -\frac{4}{3} < x < \frac{3}{4}$

Studiamo ora il segno del denominatore.

In questo caso chiedersi quando il denominatore è positivo o negativo non cambia molto come difficoltà nei calcoli; forse è un po' più comodo studiare la negatività. Dunque

$x: D < 0 \Longrightarrow |x - 1| < 3 \Longrightarrow -3 < x - 1 < 3 \Longrightarrow -2 < x < 4$

Confrontiamo i segni del numeratore e del denominatore:



Dal confronto dei segni, volendo individuare le regioni dove la frazione è positiva o nulla, prendiamo i valori di x tali che $-2 < x \leq \frac{3}{4}$.

Ricordiamo ora di *confrontare i valori con le condizioni di esistenza*

$$\begin{cases} x \geq -\frac{4}{3} \wedge \mathrm{x} \neq 4 \\ -2 < x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

da cui, finalmente, la soluzione S: $-\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{3}{4}$.

A volte le condizioni di esistenza aiutano in modo considerevole a semplificare i calcoli; vediamo come:

Esempio.
Risolviamo

$$(⌘) \quad \frac{\sqrt{x-2}-|x|}{|x+3|-|x+2|} < 0$$

Le soluzioni sono date dalla soluzione del sistema

$$CE \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ |x+3|-|x+2| \neq 0 \end{cases}$$

Da $x-2 \geq 0$ ne viene che $x \geq 2$: questa condizione ci permette di semplificare notevolmente sia le *CE (*la condizione $|x+3|-|x+2| \neq 0$ diviene $x+3-x-2 \neq 0$ che è sempre verificata: dunque *CE:* $x \geq 2$*)* che, soprattutto, la disequazione (⌘), ottenendo

$$\frac{\sqrt{x-2}-x}{x+3-(x-2)} < 0$$

ovvero

$$\frac{\sqrt{x-2}-x}{5} < 0$$

Moltiplicando per *5* il primo e il secondo membro

$$\sqrt{x-2}-x < 0$$

da cui

$$\sqrt{x-2} < x$$

Grazie alla CE: $x \geq 2$ il primo membro esiste (e, visto che è una radice, non è negativo) e il secondo membro è una grandezza non negativa; possiamo passare ai quadrati e otteniamo

$$x-2 < x^2$$

E in forma normale

$$x^2 - x + 2 > 0$$

L'equazione associata non ha soluzione: la disequazione è in questo caso verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.

La soluzione della disequazione (⌘) coinciderà dunque con le *CE:*

$$S = [2, +\infty[$$

4.13 Esercizi proposti

1	a) $(x-5)^2 > 0$ b) $(x-5)^2 \geq 0$ c) $(x-5)^2 < 0$ $(x-5)^2 \leq 0$
2	a) $\lvert x-5\rvert > 0$ b) $\lvert x-5\rvert \geq 0$ c) $\lvert x-5\rvert < 0$ d) $\lvert x-5\rvert \leq 0$
3	a) $\sqrt{x-6} > 0$ b) $\sqrt{x-6} \geq 0$ c) $\sqrt{x-6} < 0$ d) $\sqrt{x-6} \leq 0$
4	a) $\frac{1}{x-3} > 0$ b) $\frac{1}{x-3} < 0$ c) $\frac{1}{x-3} \leq 0$ d) $\frac{1}{x-3} \geq 0$
5	a) $\frac{1}{\lvert x-3\rvert} > 0$ b) $\frac{1}{\lvert x-3\rvert} < 0$ c) $\frac{1}{\lvert x-3\rvert} \leq 0$ d) $\frac{1}{\lvert x-3\rvert} \geq 0$
6	a) $\frac{1}{(x-3)^2} > 0$ b) $\frac{1}{(x-3)^2} < 0$ c) $\frac{1}{(x-3)^2} \leq 0$ d) $\frac{1}{(x-3)^2} \geq 0$
7	a) $\frac{1}{\sqrt{x-3}} > 0$ b) $\frac{1}{\sqrt{x-3}} < 0$ c) $\frac{1}{\sqrt{x-3}} \leq 0$ d) $\frac{1}{\sqrt{x-3}} \geq 0$
8	a) $\frac{1}{\sqrt[3]{x-3}} > 0$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{x-3}} < 0$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{x-3}} \leq 0$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{x-3}} \geq 0$
9	Studia il segno dei seguenti polinomi a) $2-x$ b) x^2-2x c) x^2-3x+2 d) $-x^2+4$ e) x^2+3 f) x^2-6x+9 g) x^3+5x^2 h) x^4-1
10	Risolvi le seguenti disequazioni intere a) $x^3-2x^2+x \geq 0$ b) $5x^2-x^3-2x-8 < 0$ c) $-x^4 < 0$ d) $x^3-x^2-x+1 > 0$ e) $(2+3x)^4 \leq 1$
11	Risolvi le seguenti disequazioni fratte a) $\frac{1-2x}{x+3} < 0$ b) $\frac{x^2+5}{x-9} \geq 0$ c) $\frac{x-1}{(x-5)^2} > 0$ d) $\frac{x^2-1}{25-x^2} \geq 0$ e) $\frac{(x-4)(x+6)}{(4-x)(x+7)} \leq 0$ f) $\frac{x^3+x}{x^4-1} \leq 0$ g) $\frac{-2x^2-3}{x^2-1} \geq 0$ h) $\frac{3}{x^2} > 1$ i) $\frac{3x}{x^2-4x} < 0$ l) $\frac{-7}{x+1} > 0$ m) $\frac{1-x}{x^2-1} < 0$
12	Risolvi le seguenti disequazioni fratte a) $\frac{1+x}{x} < 1$ b) $2 < \frac{5}{x}$ c) $\frac{x-2}{x} - \frac{4x+1}{4} < \frac{3-2x}{2}$ d) $\frac{3x+1}{x} < 2$ e) $\frac{1}{x-1} \leq 3$ f) $\frac{3-x}{x} - \frac{x+4}{3x} < \frac{6}{x}$ g) $\frac{2x-1}{1-3x} \leq 2$ h) $-\frac{4-3x}{3x} + \frac{4x-1}{5-4x} > 0$ i) $\frac{2x-1}{x+3} \leq 1$ l) $\frac{3x}{x-2} + \frac{4}{x+2} \leq \frac{3x^2+8}{x^2-4}$ m) $\frac{3x^3-x^2-7x-3}{9-25x^2} \geq \frac{1}{5x-3}$
13	Risolvi i seguenti sistemi a) $\begin{cases} x^2-5x+4 \geq 0 \\ x^2+5x+4 \leq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{3-4x}{2x} < 6 \\ \frac{6}{x+1} > 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{8}{x-5} < \frac{7}{2-x} \\ x^2-16 < 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{1}{x-1} + 1 > 0 \\ \frac{3}{2-3x} > 0 \\ x^2 + \sqrt{x-1} < 0 \end{cases}$
14	a) $\frac{1}{\sqrt[3]{x-3}} > 0$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{x-3}} < 0$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{x-3}} \leq 0$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{x-3}} \geq 0$

15	Determina per quali valori del parametro k la soluzione dell'equazione $$1+4x-(2k+1)x=3-k(2x-5)$$ soddisfa la condizione $2 \leq x < 6$.
16	Determina per quali valori del parametro k la soluzione del sistema $$\begin{cases} x+y=k-1 \\ 3x+\dfrac{k-2}{2}=3 \end{cases}$$ soddisfi la condizione $x < 4 \wedge 0 < y < 5$.
17	Risolvi le seguenti equazioni contenenti valori assoluti a) $\|x+4\|=3$ b) $\|2+x\|=3x$ c) $\frac{x+1}{4}=\|x\|$ d) $\|x-2\|+\|x+5\|=-1$ e) $\|x-2\|+\|x-4\|=5$ f) $\|x\|+x=0$ g) $\|x-1\|=\|2-x\|$ h) $\left\|\frac{2-x}{2}\right\|<1$
18	Risolvi le seguenti disequazioni contenenti valori assoluti a) $\|1+x\|<3$ b) $\|2-x\|>5$ c) $\frac{1}{\|x+1\|}<3$ d) $\frac{1}{\|2x+1\|}>2$ e) $\left\|3+\frac{2-x}{x-3}\right\|>2$ f) $\left\|\frac{x+4}{1-x}\right\|<1$ g) $\left\|\frac{x-6}{1-x}\right\|>3$
19	Risolvi le seguenti disequazioni contenenti valori assoluti a) $\|1-x\|+2-x<5$ b) $\|2+x\|+x>3$ c) $\|x\|+x>0$ d) $\frac{1}{\|x-3\|}+\frac{1}{2\|3x-1\|}>0$ e) $\frac{\|2x-4\|}{x^2+1}<0$ f) $\frac{2}{\|x-1\|+2}>-\|x+3\|$ g) $\frac{-4}{\|x+5\|}>0$ h) $\|2x-3\|>x$ i) $\|x+2\| \geq \|4-3x\|$
20	Dati i predicati $$p(x): \left(1>\frac{1}{\|x\|}\right) \qquad q(x): \left(\frac{3}{\|x-1\|}>4\right)$$ determina l'insieme di verità di a) $p(x) \wedge q(x)$ b) $p(x) \vee q(x)$ c) $p(x) \wedge \overline{q(x)}$ d) $\overline{p(x)} \vee q(x)$
21	Risolvi i sistemi contenenti: a) 9a, 11b b) 12h, 4d c) 10d, 12e, 18g d) 10c, 12d, 11e e) 11i, 17a f) 11g, 12c
22	Risolvi discutendo la soluzione al variare del parametro a) $ax-1>0$ b) $ax-x-1 \leq 0$ c) $a^2x-1<2ax-x$ d) $\frac{1-x}{x-k} \leq 0$ e) $\frac{3k-x}{x+k} \geq 0$ f) $\frac{x-3k+1}{x-2k}<0$
23	Risolvi le seguenti disequazioni contenenti radicali e moduli a) $\frac{\sqrt{x-1}}{\|x\|-3} \geq 0$ b) $\left(\sqrt{x^2+4}\right) \cdot \frac{4-x}{\|x-1\|}>0$ c) $\frac{(\|x\|+1)(\sqrt{x-2}+3)}{\|x-1\|}>0$ d) $\frac{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}{\|x\|} \leq 0$ e) $\sqrt{\frac{\|x\|-4}{x^2+4}} \leq 0$
24	Per ognuna delle seguenti espressioni E, risolvi $E<0, E>0, E \leq 0, E \geq 0$. a) $(x-1)^2$ b) $\|x-1\|$ c) $\sqrt{x-1}$ d) $\frac{1}{x-1}$ d) $\frac{1}{(x-1)^2}$ e) $\frac{1}{\|x-1\|}$ f) $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$
25	a) $\|3x-4\| \leq -1$ b) $\|3x-4\| \geq -1$ c) $\|3x-4\|>1$ d) $\|3x-4\|<1$
26	a) $\sqrt{x-2}<-1$ b) $\sqrt{x-2}>-1$ c) $\sqrt{x-2}<1$ d) $\sqrt{x-2}>1$ e) $\sqrt[3]{x-1}>1$ f) $\sqrt[4]{x+3}<2$

27	a) $(x-3)^2<-1$ b) $(x-3)^2>-1$ c) $(x-3)^2\le 1$ d) $(x-3)^2\ge 1$
28	a) $\frac{1}{x-1}>-1$ b) $\sqrt{\frac{1}{x-1}}>-1$ c) $\sqrt{\frac{1}{\lvert x-1\rvert}}>-1$ d) $\sqrt{\frac{1}{(x-1)^2}}>-1$ e) $\sqrt{\frac{1}{(x-1)^2}}<-1$
29	a) $\left\lvert\frac{2x}{x-1}\right\rvert\le 0$ b) $\left\lvert\frac{1}{1+2x}\right\rvert<1$ c) $x^2-\lvert x\rvert-12<0$ d) $\frac{\lvert x-4\rvert}{x^2+1}<-4$ e) $\frac{x^2}{\lvert x-4\rvert}<3$ f) $\frac{\lvert x^2-4\rvert}{x+2}<1$ f) $\frac{x^2-25}{\lvert x-4\rvert}<0$ g) $\frac{2x+1}{\lvert 2x-6\rvert}+2>0$ h) $\left\lvert\frac{x+3}{x-2}\right\rvert\ge\frac{1}{2}$ i) $\lvert 4x-3\rvert\le\lvert 2x-1\rvert$
30	a) $2+\lvert 3+4x\rvert<x$ b) $\frac{1}{4}x^2+x-\lvert x+3\rvert<0$ c) $2-x\ge\lvert 3x-1\rvert$ d) $\lvert x^2-1\rvert>2x$ e) $2x-\lvert x+5\rvert+3<0$ f) $x\lvert x\rvert<1$ g) $\lvert 3x-1\rvert>2x-1$
31	… elevare o non elevare?... questo è il problema! ☹ a) $\lvert x-5\rvert\ge\lvert x+2\rvert$ b) $\lvert x^2-4\rvert+3\lvert 2-x\rvert<0$ c) $\lvert x^2-4\rvert+3\lvert 2-x\rvert\le 0$ d) $\lvert x^2-4\rvert+3\lvert 2-x\rvert>0$ e) $\lvert x^2-4\rvert+3\lvert 2-x\rvert\ge 0$ f) $\lvert x+3\rvert+\lvert x+7\rvert<2$ g) $\lvert x-2\rvert-2\lvert x-1\rvert>2$ h) $2\lvert x-1\rvert>\lvert x+1\rvert$ i) $\lvert x^2-3\rvert\le 2\lvert x\rvert$
32	a) $\frac{x\lvert x\rvert}{1+x^2}<\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{\lvert x\rvert}\le\lvert x+4\rvert$ c) $\frac{\lvert x-1\rvert-1}{x^2-4x}>0$ d) $\frac{x^2-\lvert x\rvert}{\lvert x-1\rvert}\ge 0$ e) $\frac{\lvert 6x^2-1\rvert+4}{\lvert x-1\rvert}>0$ f) $\frac{2x-\lvert x-1\rvert}{\lvert x\rvert-2}\ge 0$
33	a) $\sqrt{3-x^2}+1>0$ b) $2x-1>\sqrt{3-2x}$ c) $1+x+\sqrt{x+2-x^2}>0$ d) $\sqrt{2-x}-1+\frac{1}{2}x\le 0$ e) $\sqrt{10-5x}<8+x$ f) $\sqrt{16-6x-x^2}>4+x$ g) $x+\sqrt{2-x^2}>0$ h) $x>x\sqrt{4-x}$ i) $\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+3x+2}$ l) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}<8$ m) $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-3x+2}\le 0$ n) $\sqrt[3]{3x-x^3-2}-x+1<0$ o) $\sqrt{x^2+2x}\ge 3x$
34	a) $\frac{\sqrt{x+1}-4}{x-\sqrt{x^2-2x}}\ge 0$ b) $\frac{\sqrt{x+4}-1}{x^2+6x-7}\le 0$ c) $\frac{\sqrt{3x^2+x-4}}{x-1}>2$ d) $\frac{\sqrt{x+3}-2x+9}{x^2+2x}<0$ e) $\frac{\sqrt{3x+x^2}}{x-7}<1$ f) $\frac{x-2-\sqrt{7-2x}}{2x-3}\le 0$ g) $\frac{\sqrt{x+3}+x-3}{8-x^3}\le 0$
35	Scrivere le condizioni che deve soddisfare $x\in\mathbb{R}$ affinché siano soddisfatte le seguenti disequazioni: a) $\sqrt{x}>\lvert f(x)\rvert$ b) $\sqrt{\lvert f(x)\rvert}<x$ c) $\sqrt{\lvert x\rvert}\ge\lvert f(x)\rvert$ d) $\sqrt{f(x)}>\sqrt{\lvert g(x)\rvert}$ e) $\sqrt[3]{x}<\sqrt{f(x)}$ f) $x^2+1\ge\sqrt{f(x)}$ g) $\sqrt{f(x)}\le\lvert x-1\rvert$
36	a) $\sqrt{x-2}\ge\lvert 2x+1\rvert$ b) $\sqrt{\lvert x-2\rvert}\ge\lvert x\rvert$ c) $\sqrt{\lvert x\rvert-2}\le\lvert x-4\rvert$ d) $\sqrt{\lvert x\rvert-1}\ge 3-x$ e) $\sqrt{2x-3}>\lvert 2x-5\rvert$ f) $\lvert x-1\rvert-3+\sqrt{x+2}>0$ g) $\sqrt{\lvert x^2-1\rvert}<5+x$ h)
37	a) $\frac{\sqrt{x-\lvert x-1\rvert}-x}{x-\sqrt{x}}\ge 0$ b) $\frac{\lvert x+x^2\rvert-2}{\sqrt{x-1}-x+3}>0$ c) $\frac{\sqrt{x^2-2x}-x+1}{\lvert x^2-9\rvert}>0$ d) $\frac{\sqrt{3x+4}-4+2x}{\lvert x-1\rvert-3}\ge 0$ e) $\frac{3-\lvert x^2-1\rvert}{\sqrt{2x-2}-x+1}\le 0$ f) $\frac{\sqrt{x^2-2x}-x+1}{\lvert x^2-9\rvert}>0$ g) $\frac{1-x^2}{\sqrt{x^2-2x}+x-3}\le 0$

La funzione esponenziale e logaritmica

5.1 La funzione esponenziale: definizione

Ci proponiamo di dare un significato alla scrittura

$$b^x$$

dove b è un numero reale positivo e x è un numero reale.

Poniamo

- $b^0 = 1$
- se $x \in \mathbb{N}, x \geq 1$ allora $b^x = \underbrace{b \cdot \ldots \cdot b}_{x\ volte}$
- se $x \in \mathbb{Z}$ allora $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$. Ad esempio $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
- se $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ allora $b^x = \sqrt[n]{b^m}$

- E' possibile definire b anche nel caso in cui $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, ovvero x sia un numero irrazionale: vediamo come.

In generale, se si vuole definire il numero

$$b^x$$

se x è un numero irrazionale, si prende una successione x_n che approssima x, e si pone

$$b^x = \lim_{n \to +\infty} b^{x_n}$$

Sotto la condizione che b sia un numero positivo è dunque possibile definire una funzione

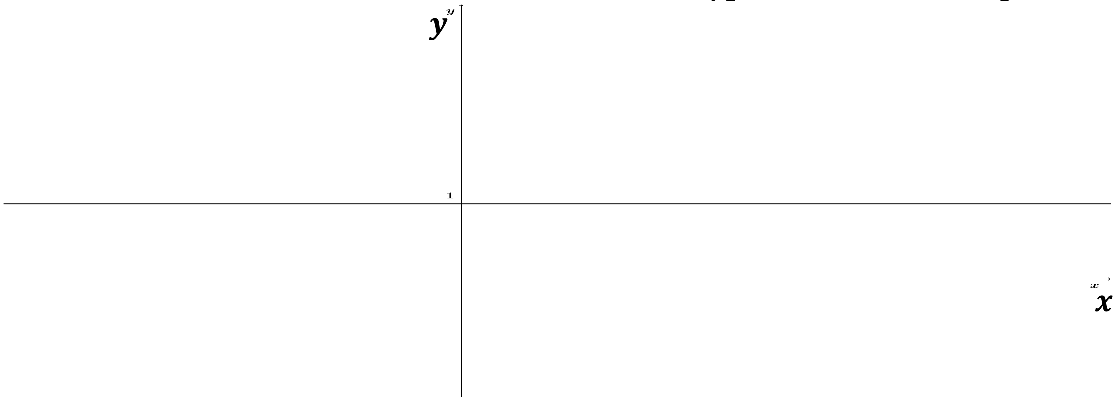
$$f_b: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

che associa *ad ogni numero reale x il numero* b^x, in modo che $f_b(x) = b^x$.

La funzione $f_b: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_b(x) = b^x$ prende il nome di *funzione esponenziale di base b.*

Cerchiamo di capire l'andamento del grafico della funzione f_b.

Nel caso in cui $b = 1$ otteniamo la funzione costante $f_1(x) = 1^x = 1$ il cui grafico è

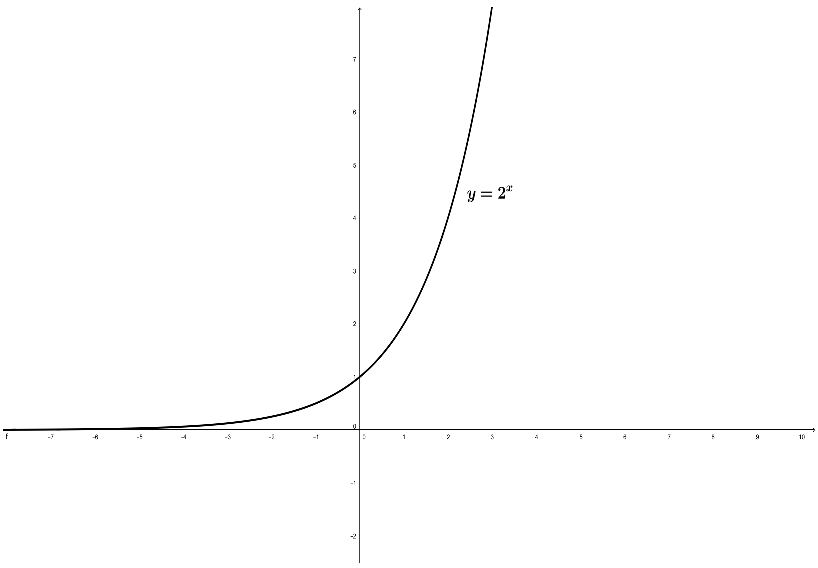


Vediamo il caso in cui la base sia un numero $b > 1$, ad esempio $b = 2$.

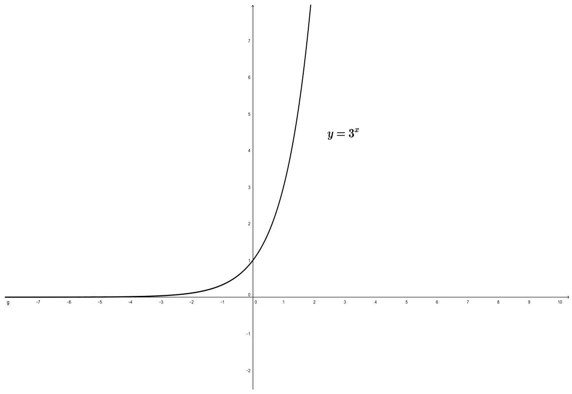
Per ottenere il grafico della funzione $f_2(x) = 2^x$ si può procedere per punti: attribuendo alla variabile x i valori $0,1,2,3,-1,-2$ possiamo costruire la tabella

x	$y = f_2(x) = 2^x$
0	*1*
1	*2*
2	*4*
3	*8*
-1	*1/2*
-2	*1/4*

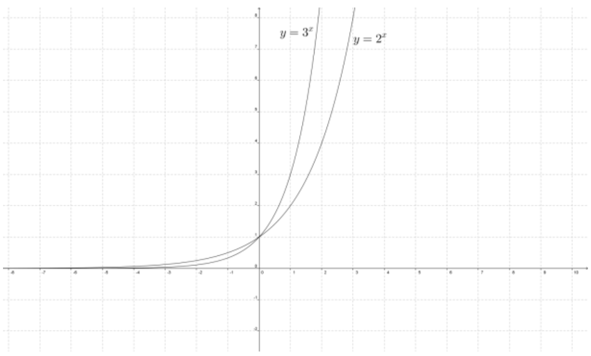
ottenendo



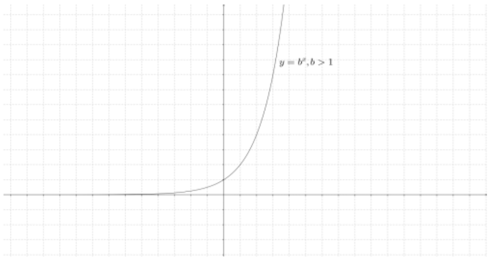
Procedendo in modo del tutto analogo si perviene al grafico della funzione esponenziale di base *3,* $f_3(x) = 3^x$.



Possiamo notare che le due funzioni hanno lo stesso andamento *qualitativo*:



In generale, tutte le funzioni esponenziali $f_b(x) = b^x$ con la base $b > 1$ hanno un andamento del tipo



Osservando il grafico notiamo che $y = b^x$ è un numero sempre positivo: come insieme di arrivo possiamo perciò scegliere l'insieme $C = \mathbb{R}^+$. La funzione

$$f_b: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f_b(x) = b^x \quad \text{con } b > 1$$

risulta, in questo modo, *suriettiva*.

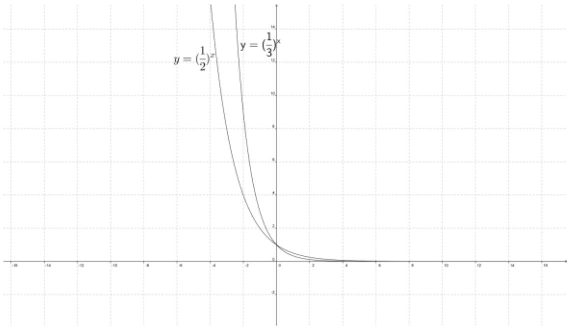
Possiamo ora esplorare l'andamento della funzione esponenziale $f_b(x) = b^x$ con la base $0 < b < 1$.

Consideriamo per fissare le idee $f_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $f_{\frac{1}{3}}(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

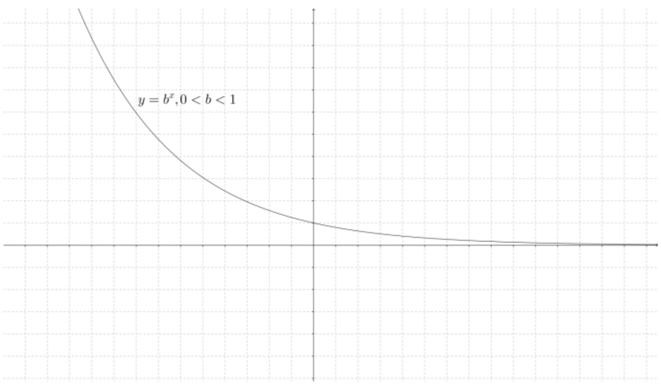
Possiamo realizzare una tabella

x	$y = f_{\frac{1}{2}}(x)$	$y = f_{\frac{1}{3}}(x)$
0	1	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$
-1	2	3
-2	4	9

e ottenere così



In generale, l'andamento *qualitativo* della funzione esponenziale $f_b(x) = b^x$, con la base $0 < b < 1$ è



Analogamente al caso precedente notiamo che $y = b^x$ è un numero sempre positivo: scegliendo come insieme di arrivo $C = \mathbb{R}^+$, la funzione

$$f_b \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f_b(x) = b^x \quad \text{con } 0 < b < 1$$

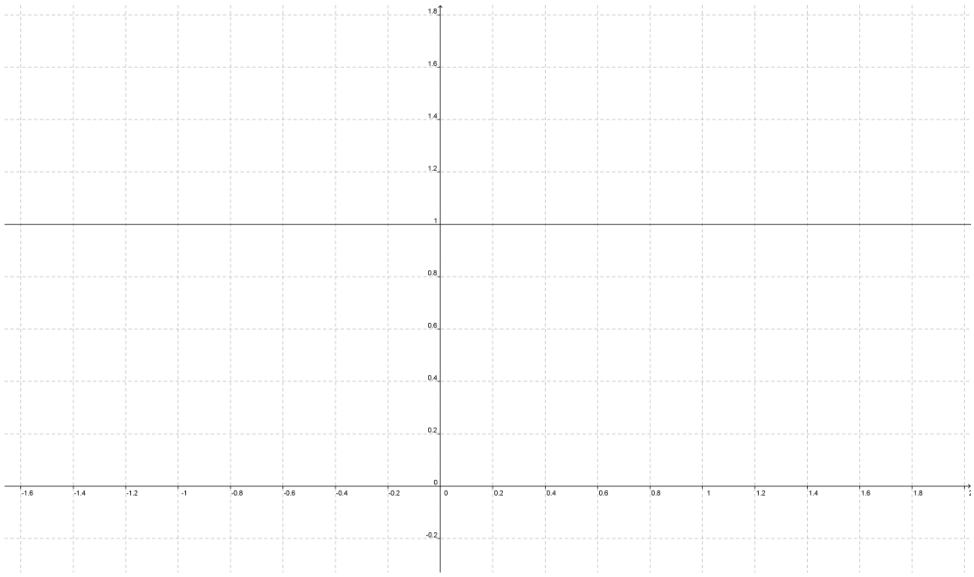
risulta *suriettiva*.

5.2 Le proprietà della funzione esponenziale

1° caso: $b = 1$.

$f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = 1^x = 1$

Come abbiamo visto, è una funzione costante

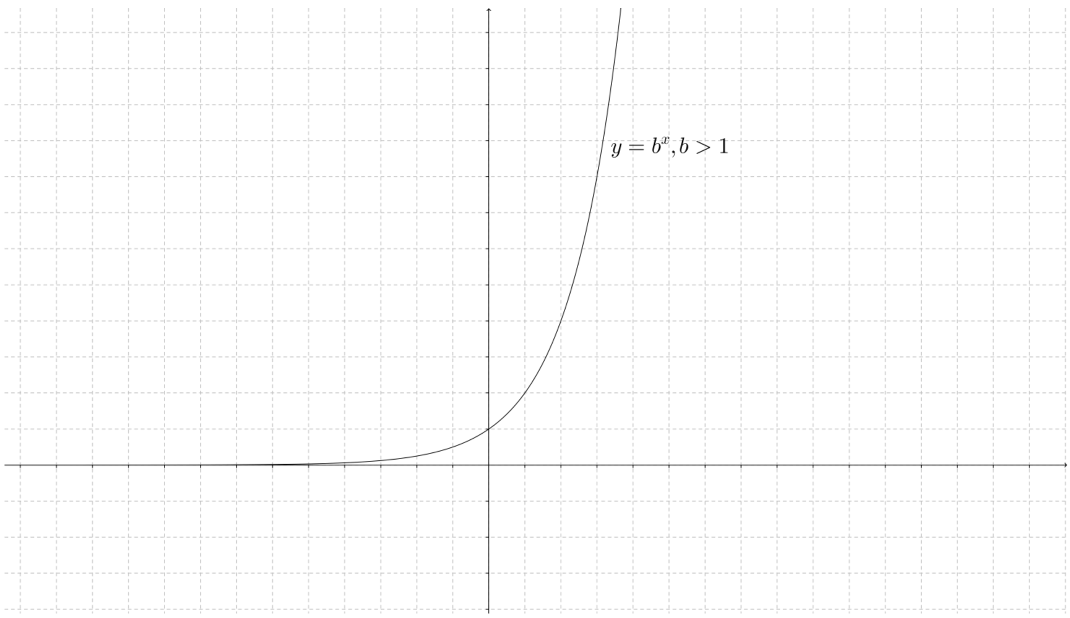


Non è iniettiva, dunque neanche invertibile.

2° caso: $b > 1$.

$f_b \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \ \ f_b(x) = b^x$

Il grafico ha un andamento del tipo



i. Il *dominio* è l'insieme $D = \mathbb{R}$. Dunque, in particolare

$$b^x \text{ è definita per ogni } x \in \mathbb{R}$$

ii. Il *codominio* è $C = \mathbb{R}^+$. La funzione b^x è perciò sempre positiva, ovvero

$$b^x > 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

iii. La funzione $f_b(x) = b^x$ è *iniettiva*; ovvero, scelti a piacere due elementi x_1 e x_2 appartenenti al dominio, da

$$f_b(x_1) = f_b(x_2)$$

segue necessariamente che

$$x_1 = x_2.$$

Se due elementi hanno la stessa immagine, dunque, devono coincidere.
Ad esempio, consideriamo l'uguaglianza

$$3^{x-1} = 3^4$$

- 3^{x-1} è l'immagine della funzione esponenziale $y = 3^x$ di $(x-1)$
- 3^4 è l'immagine della funzione esponenziale $y = 3^x$ di 4

perciò, *dalla proprietà iniettiva* segue

$$x - 1 = 4$$

da cui $x = 5$.

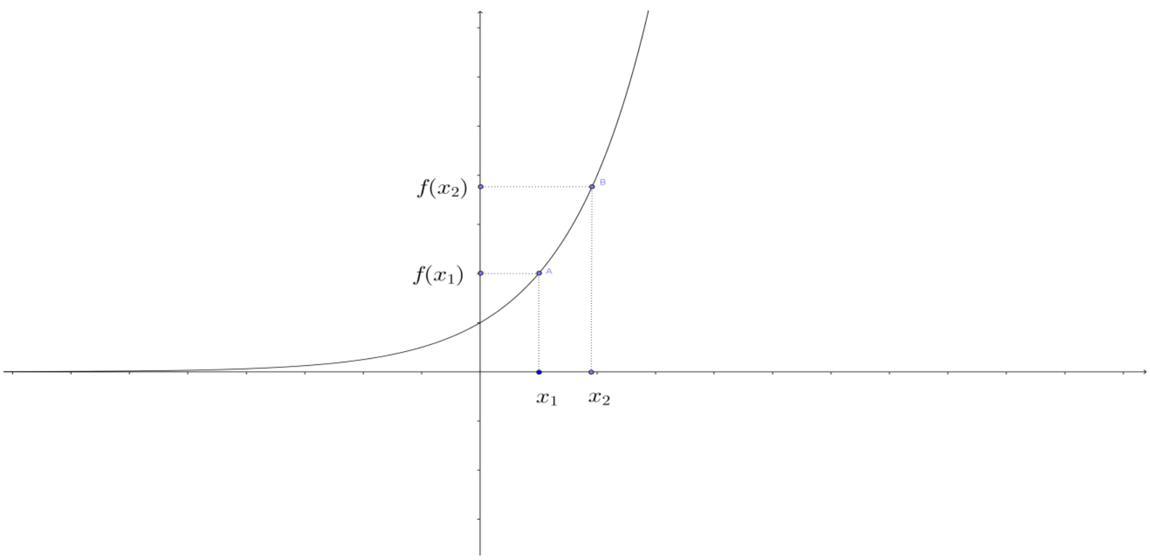
La funzione $f_b(x) = b^x$ con $b > 1$, essendo iniettiva e suriettiva, è perciò *invertibile*.

iv. La funzione $f_b(x) = b^x$ è *crescente*, ovvero *conserva la relazione di ordine fra gli elementi del dominio e le rispettive immagini.*
In particolare, se due arbitrari elementi del dominio x_1 e x_2 sono tali che

$$f_b(x_1) < f_b(x_2)$$

segue necessariamente che

$$x_1 < x_2.$$



La relazione fra due potenze con la stessa base si trasporta ai rispettivi argomenti; ad esempio, da

$$5^{x+3} < 5^{2x}$$

essendo il primo e il secondo membro immagini della funzione esponenziale $y = 5^x$ di $(x+3)$ e $2x$, segue che

$$x + 3 < 2x$$

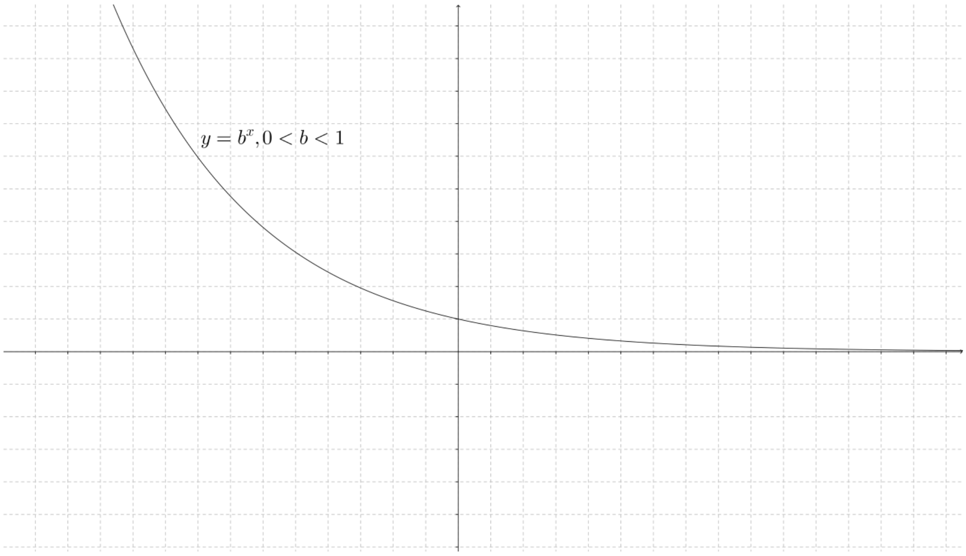
da cui

$$x > 3$$

3° caso: $0 < b < 1$.

$f_b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ \ f_b(x) = b^x$

Il grafico ha un andamento del tipo



i. Il *dominio* è l'insieme $D = \mathbb{R}$. Dunque, in particolare

$$b^x \textit{ è definita per ogni } x \in \mathbb{R}$$

ii. Il *codominio* è $C = \mathbb{R}^+$. La funzione b^x è perciò sempre positiva, ovvero

$$b^x > 0 \textit{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

iii. La funzione $f_b(x) = b^x$ è *iniettiva*; ovvero, scelti a piacere due elementi x_1 e x_2 appartenenti al dominio, da

$$f_b(x_1) = f_b(x_2)$$

segue necessariamente che

$$x_1 = x_2.$$

Se due elementi hanno la stessa immagine, dunque, devono coincidere.

Ad esempio, consideriamo l'uguaglianza

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{5}$$

- $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ è l'immagine della funzione esponenziale $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ di $(x+2)$
- $\left(\frac{1}{3}\right)^{5}$ è l'immagine della funzione esponenziale $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ di 5

perciò, dalla proprietà di iniettività segue

$$x + 2 = 5$$

da cui

$$x = 3$$

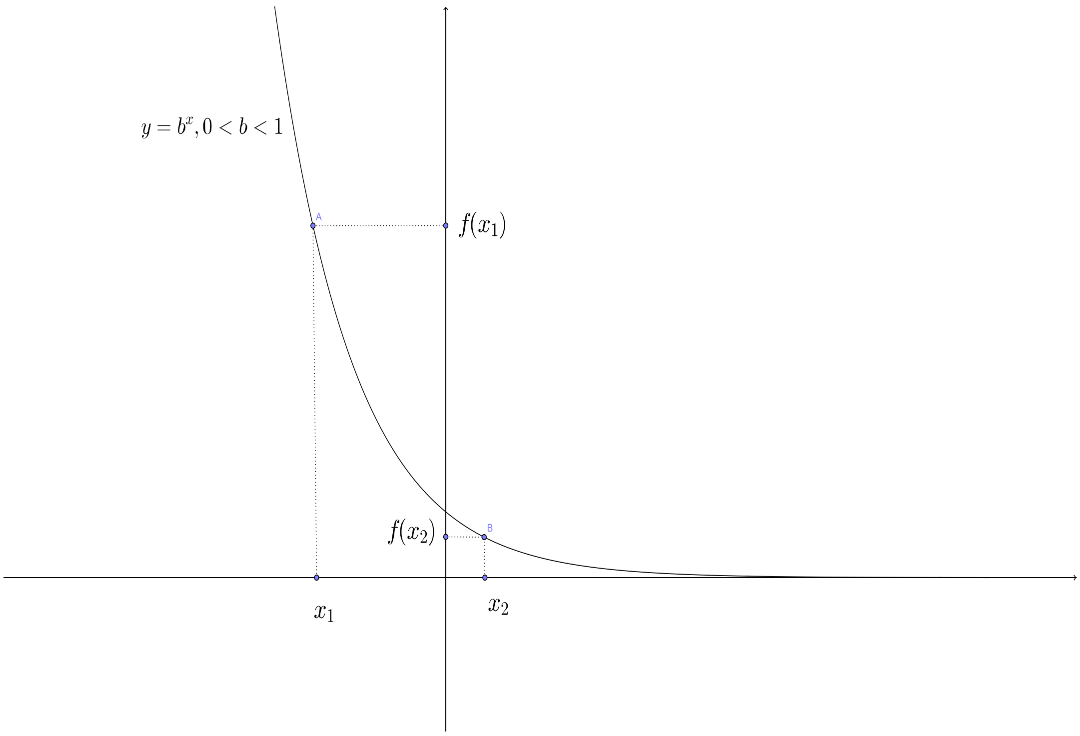
iv. La funzione $f_b(x) = b^x$ è *decrescente*, ovvero *inverte la relazione di ordine fra gli elementi del dominio e le rispettive immagini.*
In particolare, se due arbitrari elementi del dominio x_1 e x_2 sono tali che

$$f_b(x_1) < f_b(x_2)$$

segue necessariamente che

$$x_1 > x_2.$$

La funzione $f_b(x) = b^x$ con $0 < b < 1$, essendo iniettiva e suriettiva, è perciò *invertibile*.



4.3 Le proprietà delle potenze

Richiamiamo, senza riportarne le dimostrazioni, le più frequenti proprietà delle potenze.

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3) $(a^x)^y = a^{xy}$

Vediamo una situazione in cui si utilizzano queste proprietà.

Esprimiamo

$$4^{3x} + 2^{x+1} - 3 \cdot 2^{x-1}$$

in funzione di $2^x = t$.

Sfruttando le proprietà sopra riportate osserviamo che

- $4^{3x} = (2^2)^{3x} = 2^{6x} = (2^x)^6$
- $2^{x+1} = 2^x \cdot 2$
- $2^{x-1} = \frac{2^x}{2}$

dunque

$$(2^x)^6 + 2^x \cdot 2 - 3 \cdot \frac{2^x}{2}$$

e infine

$$t^6 + 2t - \frac{3}{2}t = t^6 + \frac{1}{2}t$$

4.4 Il numero e di Nepero

In tutta la matematica e nelle scienze riveste un ruolo fondamentale il numero di Nepero, che si usa indicare con la lettera e.

Consideriamo la successione

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

dove n è un arbitrario numero naturale maggiore o uguale a 1.

Attribuendo valori sempre maggiori ad n otteniamo

- $a_1 = 2$
- $a_2 = 2{,}25$
- $a_3 = 2{,}370$
- $a_4 = 2{,}441$
- $a_5 = 2{,}488$

All'aumentare di n osserviamo che la successione si "stabilizza" e converge ad un numero irrazionale: questo è precisamente il numero di Nepero.

In termini un po' più formali, possiamo dire che

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

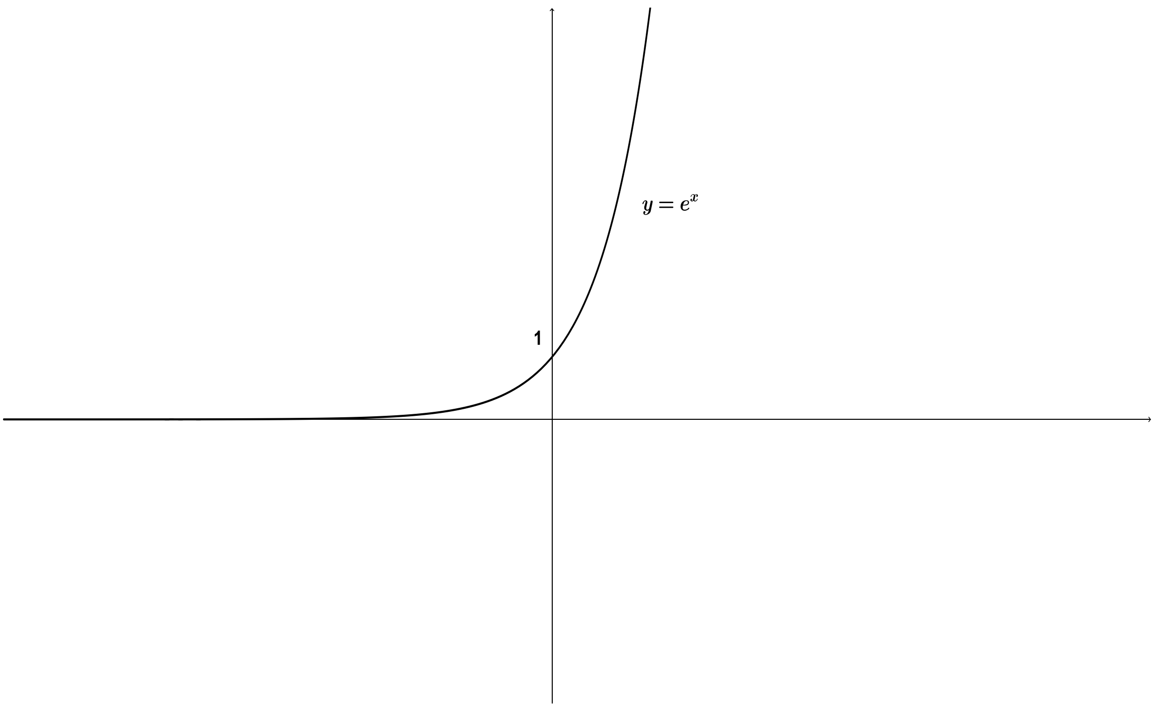
Questa scrittura si legge *"e è il limite della successione* $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *per n che tende all'infinito"*

e significa che il numero e è ottenuto dalla successione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ all'aumentare indefinito di n.

Le prime cifre decimali di e sono

$$e = 2{,}71828182845904 \ldots$$

Poiché e è maggiore di *1*, il grafico della funzione esponenziale $y = e^x$ è



5.5 Le equazioni esponenziali

Chiamiamo *equazioni esponenziali* le equazioni che hanno l'incognita che compare nell'esponente di una potenza.

E' un'equazione esponenziale, ad esempio

$$2 \cdot 3^x = 4$$

Non è una equazione esponenziale

$$2^3 \cdot x = 4$$

Ricordiamo che si chiama *soluzione* dell'equazione un numero che

1) può essere sostituito al posto della incognita
2) rende vera l'uguaglianza

Grazie alla iniettività della funzione esponenziale sappiamo che da una relazione di uguaglianza fra due potenze con la stessa base possiamo ottenere un'uguaglianza fra i rispettivi esponenti.

Ad esempio, da

$$2^{x-3} = 2^5$$

possiamo dedurre

$$x - 3 = 5$$

da cui, infine

$$x = 8$$

Per risolvere una equazione esponenziale, possiamo ricondurci – se è possibile -a una forma del tipo

$$b^{f(x)} = b^N$$

che possiamo chiamare *equazione in forma normale.*

Esempio 1.
Risolviamo

$$2^{x-3} = -2$$

Poiché la funzione esponenziale è *sempre positiva*, l'uguaglianza non è verificata per alcun valore di x, dunque $S = \emptyset$.

Esempio 2.
Risolviamo

$$3^{x-4} = 1$$

Poiché $1 = 3^0$ l'equazione diventa

$$3^{x-4} = 3^0$$

Dunque $x - 4 = 0$ e, infine, $x = 4$ ovvero $S = \{4\}$.

Esempio 3.
Risolviamo

$$2^{x-1} = 3^{x^2-x}$$

Qui non abbiamo un confronto fra due potenze con la stessa base. Comunque, dall'esame del grafico delle funzioni $y = 2^x$ e $y = 3^x$ possiamo osservare che le due potenze hanno lo stesso valore se entrambi gli esponenti sono nulli: dunque, l'eventuale soluzione della equazione è costituita dai valori che annullano gli esponenti, ovvero dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x^2 - x = 0 \end{cases}$$

Si verifica facilmente che $S = \{1\}$.

Esempio 4.
Risolviamo

$$2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$$

In questo caso non è possibile ricondurci immediatamente a una equazione in forma normale.

Osserviamo che

$$2^{2x} = (2^x)^2$$

l'equazione si può scrivere

$$(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$$

Possiamo interpretare l'equazione ottenuta come una equazione di secondo grado di incognita 2^x. Una volta risolta, noto il valore di 2^x, dovremo essere in grado di determinare x.

Poniamo dunque $2^x = t$ e otteniamo

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

che risolta

$$t = -1 \vee t = 4$$

ovvero

$$2^x = -1 \vee 2^x = 4$$

- $2^x = -1$ non ha soluzione
- $2^x = 4$ è verificata per $x = 2$

In definitiva $S = \{2\}$.

5.6 Le disequazioni esponenziali

Chiamiamo *disequazioni esponenziali* le disequazioni che hanno l'incognita che compare nell'esponente di una potenza.

E' una disequazione esponenziale, ad esempio

$$5 \cdot 3^x < 4$$

Non è una equazione esponenziale

$$2^3 \cdot x \geq 3$$

Si chiama *soluzione* della disequazione un numero che

1) può essere sostituito al posto della incognita
2) rende vera la disuguaglianza

Grazie alla *proprietà di monotonia* della funzione esponenziale (la crescenza o la decrescenza) sappiamo che da una relazione di disuguaglianza fra due potenze con la stessa base possiamo ottenere una disuguaglianza fra i rispettivi esponenti: se la funzione è *crescente*, potenze ed esponenti sono *concordi*, mentre se è *decrescente* sono *discordi*.

Ad esempio, da

$$2^{x-3} < 2^5$$

possiamo dedurre, visto che la funzione $y = 2^x$ è crescente

$$x - 3 < 5$$

da cui, infine, $x < 8$.

Per risolvere una equazione esponenziale, dobbiamo ricondurci se possibile a una forma del tipo

$$b^{f(x)} \lesseqgtr b^{g(x)}$$

che possiamo chiamare *disequazione in forma normale.*

Esempio 1.
Risolviamo

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x < 1$$

e, poiché $1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

La funzione $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ è decrescente, dunque $S: x > 0$.

Esempio 2.
Risolviamo
$$3^x < -9$$
La funzione $y = 3^x$ è sempre positiva, dunque la disequazione non ha soluzione:
$$S = \emptyset$$
Esempio 3.
Risolviamo
$$3^x \geq -3$$
La funzione $y = 3^x$ è sempre positiva, dunque la diseguaglianza è vera per ogni valore di x ovvero $S = \mathbb{R}$.

Esempio 4.
Risolviamo
$$3^{\frac{1}{x-1}} \geq -3$$
In questo caso, non tutti i valori sono sostituibili: dobbiamo richiedere che $x \neq 1$. Per tutti questi valori – per la positività di $y = 3^x$- la disequazione è vera. Dunque $S: x \neq 1$.

Esempio 5.
Risolviamo
$$e^x + 2 > 0$$
Poiché e^x è una quantità sempre positiva, la disequazione è soddisfatta per ogni valore di x ovvero $S = \mathbb{R}$.

Esempio 6.
Risolviamo
$$4\sqrt{2} < \frac{1}{\sqrt{32^x}}$$
Osserviamo che nella disequazioni compaiono tutte espressioni riconducibili a potenze di 2:

- $4\sqrt{2} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}}$
- $\frac{1}{\sqrt{32^x}} = \frac{1}{((2^5)^x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{5x}{2}}} = 2^{-\frac{5x}{2}}$

Perciò la disequazione diventa
$$2^{\frac{5}{2}} < 2^{-\frac{5x}{2}}$$
e, per la crescenza della funzione $y = 2^x$,
$$\frac{5}{2} < -\frac{5x}{2}$$
da cui, infine $S: x < 1$.

Esempio 7.
Risolviamo

$$x \cdot 2^{x+1} - 2^x \geq 0$$

Poiché $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$

$$x \cdot 2 \cdot 2^x - 2^x \geq 0$$

Possiamo raccogliere 2^x

$$2^x(2x - 1) \geq 0$$

Visto che 2^x è sempre positiva, si può dividere ambo i membri ottenendo

$$(2x - 1) \geq 0$$

e, infine $S = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Esempio 8.
Risolviamo

$$6 - 3^{3-x} + 3^x < 0$$

Poiché $3^{3-x} = \frac{3^3}{3^x} = \frac{27}{3^x}$ la disequazione diventa

$$6 - \frac{27}{3^x} + 3^x < 0$$

Poiché 3^x è una quantità sempre positiva, possiamo moltiplicare ambo i membri per 3^x ottenendo

$$6 \cdot 3^x - 27 + 3^{2x} < 0$$

Ma $3^{2x} = (3^x)^2$, dunque

$$6 \cdot 3^x - 27 + (3^x)^2 < 0$$

La disequazione ottenuta la possiamo pensare come disequazione di secondo grado con incognita $3^x = t$; otteniamo così

$$6 \cdot t - 27 + t^2 < 0$$

che, risolta,

$$-9 < t < 3$$

Ricordando che $t = 3^x$

$$-9 < 3^x < 3$$

La prima disuguaglianza è sempre vera; da $3^x < 3$, visto che $3^x < 3^1$, otteniamo $S: x < 1$.

5.7 La funzione logaritmica: definizione

Abbiamo visto che la funzione $f_b: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f_b(x) = b^x$ è definita se e solo se $b > 0$.

Inoltre

- se $0 < b < 1$ e se $b > 1$ la funzione è iniettiva e suriettiva, dunque *invertibile*
- se $b = 1$ la funzione è costante, dunque non iniettiva e perciò *non invertibile*

Definizione 1.
Chiamiamo *logaritmo in base* b *di* x *la funzione*

$$log_b: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{y} = \log_b x$$

inversa della funzione esponenziale $f_b: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f_b(x) = b^x$, con b positivo e diverso da 1.

- b si chiama *base* del logaritmo
- x si chiama *argomento* del logaritmo

Per la definizione che abbiamo dato è evidente che x *deve essere un numero positivo.*

Vediamo, per fissare le idee, come agisce la funzione $y = \log_2 x$.

Consideriamo dunque la funzione esponenziale $y = f_2(x) = 2^x$, di cui il logaritmo ne è l'inversa.

- $1 \xrightarrow{f_2} 2$, dunque
$$\log_2 2 = 1$$
- $2 \xrightarrow{f_2} 4$, dunque
$$\log_2 4 = 2$$
- $3 \xrightarrow{f_2} 8$, dunque
$$\log_2 8 = 3$$
- $-1 \xrightarrow{f_2} \frac{1}{2}$, dunque
$$\log_2 \frac{1}{2} = -1$$

Questi esempi ci portano a dare il seguente significato al logaritmo: in questo caso possiamo dire che

il $log_2 x$ è l'esponente da dare a 2 per ottenere x

E' quindi ragionevole la seguente definizione alternativa, equivalente alla precedente:

Definizione 2.
Sia b un numero *positivo e diverso da 1; s*ia inoltre $x > 0$.

Si chiama *logaritmo in base* b *di* x*,* e si indica col simbolo

$$\log_b x$$

il numero che ha la seguente proprietà:

se fa da esponente a b, fa ottenere x*.*

- b si chiama *base* del logaritmo
- x si chiama *esponente* del logaritmo

Chiamiamo *funzione logaritmica di base* b *la funzione*

$$log_b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad \text{y} = \log_b x$$

Osserviamo esplicitamente che *il logaritmo non è un'espressione sempre definita:* la base deve essere positiva ma non 1, e l'argomento deve essere positivo.

Vediamo alcuni esempi.

Esempi.
a) $\log_1 3$; è una scrittura priva di significato, poiché la base è *1*.

b) $\log_1 0$; è una scrittura priva di senso, poiché l'argomento non è positivo.

c) $\log_0 3$; è una scrittura priva di senso, poiché la base non è positiva.

d) $\log_3 9$;

- la scrittura ha senso: la base del logaritmo è positiva e non 1, e l'argomento è positivo.
- Il $\log_3 9$ è quel numero che se fa da esponente a *3* fa ottenere *9*: il numero che ha questa proprietà è 2, perciò $\log_3 9 = 2$.

e) $\log_5 5$;

- La scrittura ha senso.
- Il $\log_5 5$ è quel numero che se fa da esponente a *5* fa ottenere *5*; il numero che ha questa proprietà è *1,* dunque $\log_5 5 = 1$.

f) $\log_{\frac{1}{3}} 9$

- La scrittura ha senso.
- L'esponente da dare a $\frac{1}{3}$ per ottenere *9* è -2, perciò $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$.

g) $\log_{\sqrt{2}} 4$

- La scrittura ha senso.
- L'esponente da dare a $\sqrt{2}$ per ottenere 4 è 4, perciò $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$.

Osservazione.
Dalla definizione data di logaritmo segue che la scrittura

$$y = \log_b x$$

è equivalente a

$$b^y = x$$

5.8 Condizioni di esistenza del logaritmo

Determiniamo i valori di x che danno un senso alle seguenti scritture:

Esempio 1.

$$\log_2(x^2 - 1)$$

La base è positiva e non 1 e non crea quindi problemi. Occorre che l'argomento sia positivo, ovvero $x^2 - 1 > 0$. Pertanto

$$CE: x < 1 \vee x > 1$$

Esempio 2.

$$\log_{\frac{1}{3}}|x|$$

La base deve essere positiva, ovvero $|x| > 0$: questo avviene se $x \neq 0$ perciò

$$CE: x \neq 0$$

Esempio 3.

$$\log_x(2 - x)$$

La base deve essere positiva ma non 1 e l'argomento positivo: le condizioni di esistenza del logaritmo coincidono pertanto con la soluzione del seguente sistema

$$\begin{cases} x > 0 \wedge x \neq 1 \\ 2 - x > 0 \end{cases}$$

La seconda condizione è verificata per $x < 2$, pertanto $CE: 0 < x < 1 \vee 1 < x < 2$

Esercizio.
Determina le condizioni di esistenza delle seguenti scritture

a) $\log_2(x^2 + 1)$

b) $\log_{1-x}(x - x^2)$

c) $\log_{x^3} 3$

5.9 Esprimere ogni numero come un logaritmo di una base a piacere

È possibile (e sarà utile, come vedremo) esprimere un qualunque numero come logaritmo con base a piacere.

Vediamo ad esempio come esprimere il numero *3* come un logaritmo in base *2:* questo significa determinare un numero x che verifichi la relazione

$$3 = \log_2 x$$

Che è equivalente all'uguaglianza $2^3 = x$, da cui $x = 8$.

Perciò $3 = \log_2 8$.

Possiamo esprimere *3* come logaritmo di una qualunque altra base a nostro piacimento, procedendo come sopra: se volessimo esprimerlo come un logaritmo a base $\frac{1}{5}$, ad esempio poniamo

$$3 = \log_{\frac{1}{5}} x$$

e, applicando la definizione otteniamo

$$\left(\frac{1}{5}\right)^3 = x$$

dunque $3 = \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{125}\right)$.

Esercizio.
Esprimi con logaritmi di base $2, \frac{1}{2}, 0, 1, 3, \sqrt{5}$ i numeri 2, -2, 1, , -3 e 5.

5.10 Alcune relazioni notevoli

Valgono le seguenti uguaglianze.

1) $\log_b b = 1$ per ogni $b > 0, b \neq 1$.

2) $\log_b 1 = 0$ per ogni $b > 0, b \neq 1$.

La dimostrazione di questi risultati segue subito dalla definizione operativa di logaritmo.

3) Se $x > 0$ allora

$$x = b^{\log_b x}$$

Infatti, posto $y = \log_b x$ segue $b^y = x$. Da quest'ultima uguaglianza, ricordando che $y = \log_b x$, si ottiene la relazione cercata.

5.11 Le proprietà della funzione logaritmica

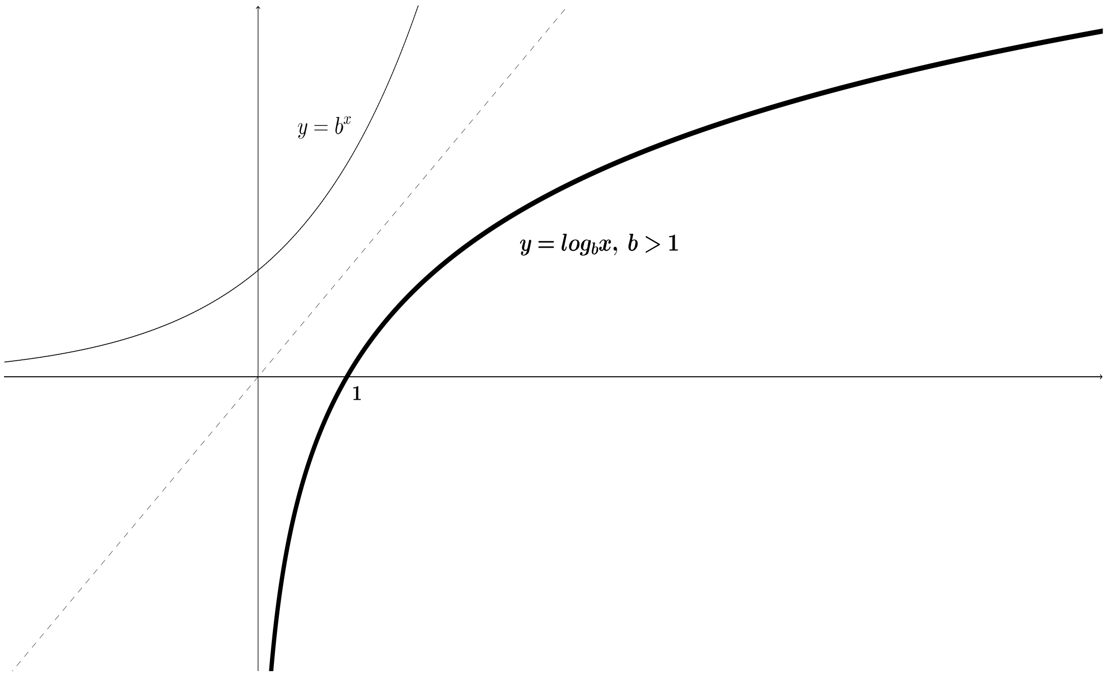
1° caso: $b > 1$.

La funzione logaritmica

$$log_b: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{y} = \log_b x$$

sappiamo essere l'inversa della funzione esponenziale $f_b: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f_b(x) = b^x$.

Poiché il grafico di una funzione inversa è simmetrico rispetto alla prima bisettrice della funzione diretta, il grafico di $\mathrm{y} = \log_b x$, $b > 1$ è il seguente



i. Il *dominio* è l'insieme $D = \mathbb{R}^+$. Dunque, in particolare

$$\log_b x \text{ è definito per } x > 0$$

ii. Il *codominio* è $C = \mathbb{R}$. La funzione $\mathrm{y} = \log_b x$ assume perciò ogni valore reale. Studiamo il *segno:*
- $\log_b x > 0$ se $x > 1$
- $\log_b x < 0$ se $x < 1$
- $\log_b x = 0$ se $x = 1$

iii. La funzione $\mathrm{y} = \log_b x$ è *iniettiva*; ovvero, scelti a piacere due elementi x_1 e x_2 appartenenti al dominio, da

$$\log_b(x_1) = \log_b(x_2)$$

segue necessariamente che

$$x_1 = x_2.$$

Se due elementi hanno la stessa immagine, dunque, devono coincidere.

Ad esempio, consideriamo l'uguaglianza

$$\log_3(x-2) = \log_3 5$$

- $\log_3(x-2)$ è l'immagine della funzione logaritmica $y = \log_3 x$ di $(x-2)$
- $\log_3 5$ è l'immagine della funzione logaritmica $y = \log_3 x$ di 5

perciò, *dalla proprietà iniettiva* segue

$$x - 2 = 5$$

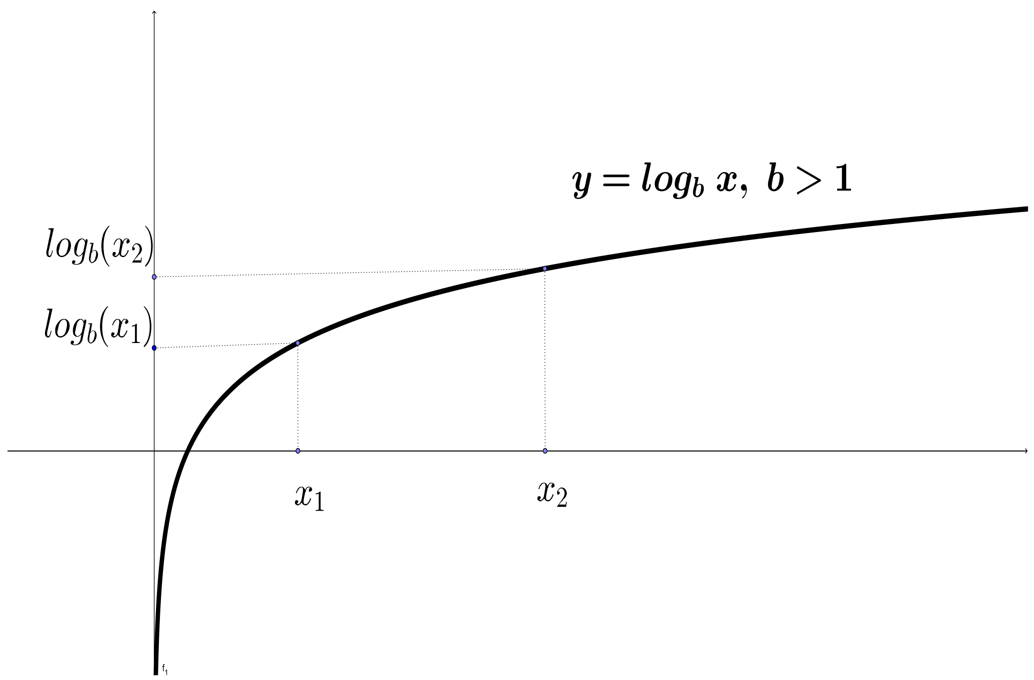
da cui $x = 7$, che è un valore ammissibile.

iv. La funzione $\mathrm{y} = \log_b x\,, b > 1$ è *crescente*, ovvero *conserva la relazione di ordine fra gli elementi del dominio e le rispettive immagini.*
In particolare, se due arbitrari elementi del dominio x_1 e x_2 sono tali che

$$\log_b(x_1) < \log_b(x_2)$$

segue necessariamente che

$$x_1 < x_2$$



La relazione fra due logaritmi con la stessa base si trasporta ai rispettivi argomenti; ad esempio, da

$$\log_5(x+3) < \log_5 2$$

essendo il primo e il secondo membro immagini della funzione logaritmica $y = \log_5 x$ di $(x+3)$ e 2, segue che

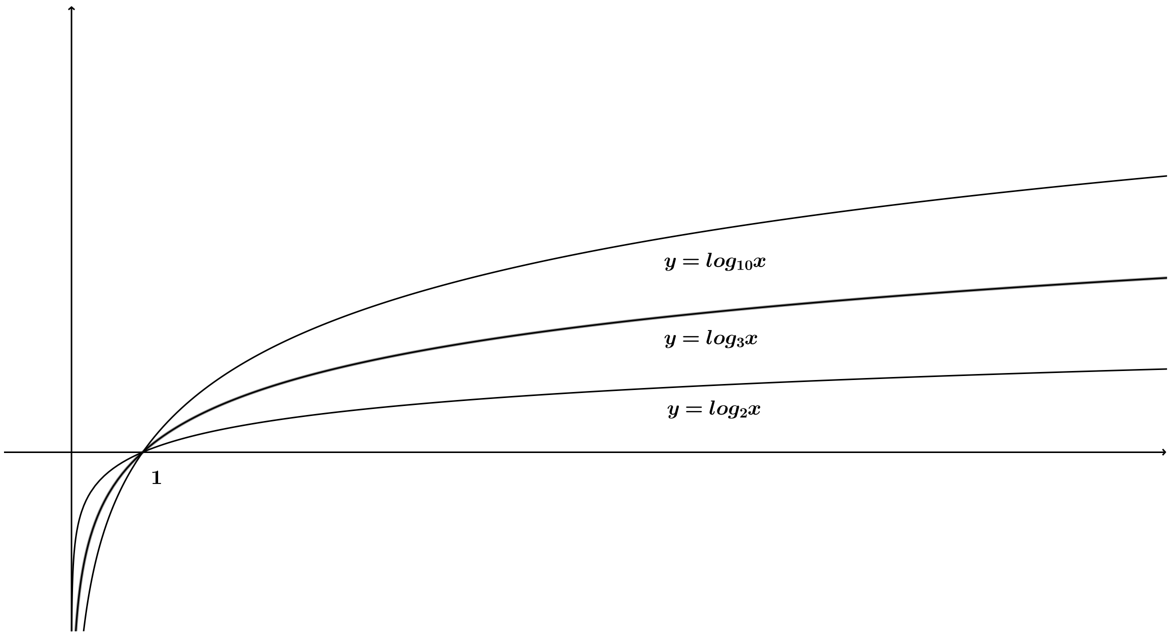
$$x + 3 < 2$$

da cui

$$x < -1$$

Poiché i valori ammissibili sono le $x > -3$, i valori che soddisfano la disuguaglianza sono $-3 < x < -1$.

Abbiamo visto che logaritmi con base maggiore di uno hanno i grafici con lo stesso andamento *qualitativo:* all'aumentare della base, il grafico del logaritmo si "schiaccia" sempre più sull'asse delle x; rappresentiamo a titolo d'esempio grafici di alcuni logaritmi con basi diverse



2° caso: $0 < b < 1$.

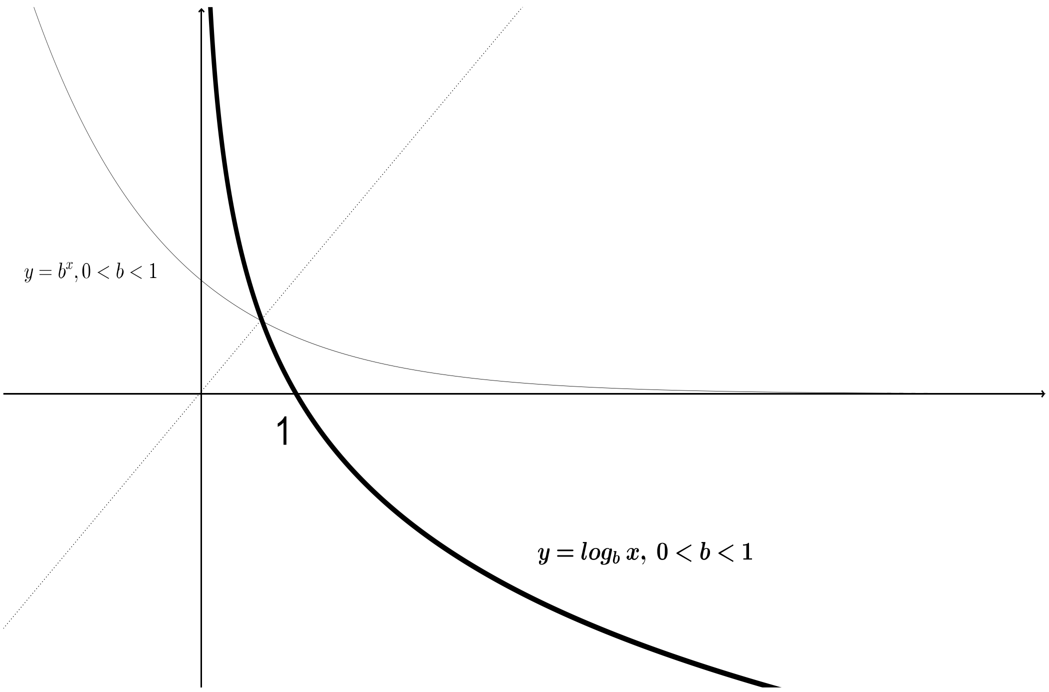
La funzione logaritmica

$$log_b : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R},\ \ y = \log_b x, 0 < b < 1$$

è l'inversa della funzione esponenziale $f_b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f_b(x) = b^x$, $0 < b < 1$.

Il grafico di $y = \log_b x, 0 < b < 1$ lo otteniamo anche in questo caso dalla funzione esponenziale simmetrizzando rispetto alla prima bisettrice.

Il grafico ha un andamento del tipo



i. Il *dominio* è l'insieme $D = \mathbb{R}^+$. Dunque, in particolare

$$\log_b x \text{ è definito per } x > 0$$

ii. Il *codominio* è $C = \mathbb{R}$. La funzione $y = \log_b x$ assume perciò ogni valore reale.
Studiamo il *segno:*

- $\log_b x > 0$ se $0 < x < 1$
- $\log_b x < 0$ se $x > 1$
- $\log_b x = 0$ se $x = 1$

iii. La funzione $y = \log_b x$ è *iniettiva*; ovvero, scelti a piacere due elementi x_1 e x_2 appartenenti al dominio, da

$$\log_b(x_1) = \log_b(x_2)$$

segue necessariamente che

$$x_1 = x_2.$$

Se due elementi hanno la stessa immagine, dunque, devono coincidere.
Ad esempio, consideriamo l'uguaglianza

$$\log_{\frac{1}{4}}(x-2) = \log_{\frac{1}{4}} 5$$

- $\log_{\frac{1}{4}}(x-2)$ è l'immagine della funzione logaritmica $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ di $(x-2)$
- $\log_{\frac{1}{4}} 5$ è l'immagine della funzione logaritmica $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ di 5

perciò, *dalla proprietà iniettiva* segue

$$x - 2 = 5$$

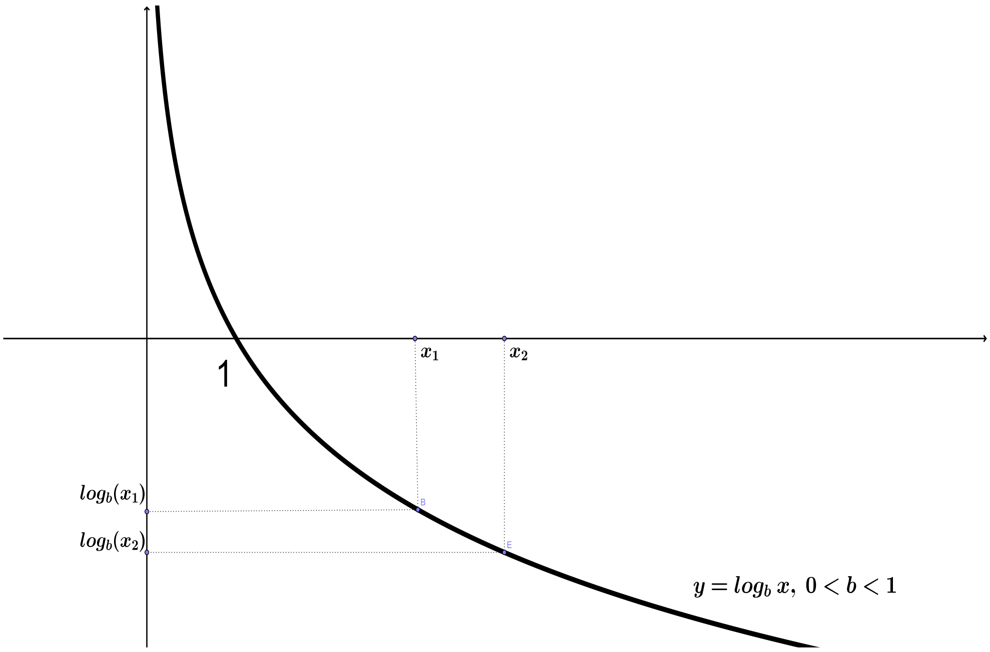
da cui $x = 7$, che è un valore ammissibile.

iv. La funzione $y = \log_b x$, $0 < b < 1$ è *decrescente*, ovvero *inverte la relazione di ordine fra gli elementi del dominio e le rispettive immagini.*
In particolare, se due arbitrari elementi del dominio x_1 e x_2 sono tali che

$$\log_b(x_1) < \log_b(x_2)$$

segue necessariamente che

$$x_1 > x_2$$



La relazione fra due logaritmi con la stessa base si inverte rispetto agli argomenti; ad esempio, da

$$\log_{\frac{2}{5}}(x+3) < \log_{\frac{2}{5}} 2$$

essendo il primo e il secondo membro immagini della funzione logaritmica $y = \log_{\frac{2}{5}} x$ di $(x+3)$ e 2, segue che

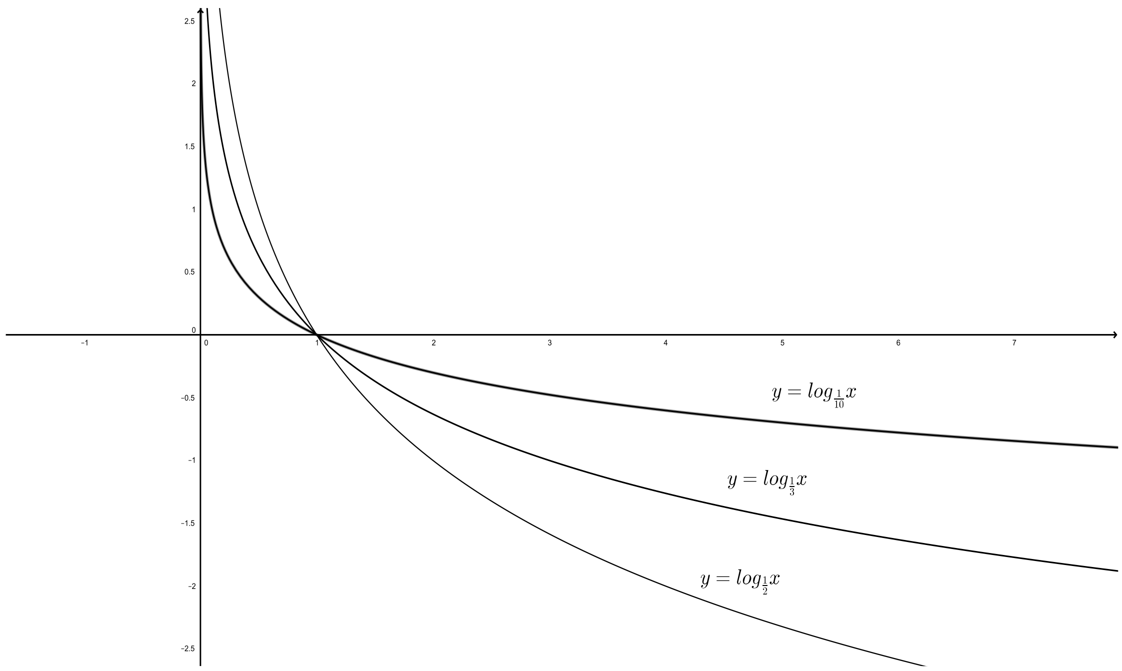
$$x + 3 > 2$$

da cui

$$x < -1$$

Poiché i valori ammissibili sono le $x > -3$, i valori che soddisfano la disuguaglianza sono $-3 < x < -1$.

Anche i logaritmi con base compresa tra zero e uno hanno i grafici con lo stesso andamento *qualitativo:* più la base è un numero vicino a zero, più il grafico del logaritmo si "schiaccia" sempre più sull'asse delle *x*, come è descritto dal seguente esempio



5.12 Logaritmi in base 10 e in base naturale

Nelle applicazioni e nella teoria sono particolarmente utilizzati logaritmi in base 10 e con base *e,* il numero di Nepero.

Per comodità nella scrittura poniamo

$$\log_{10} x = \text{Log}\, x$$

e

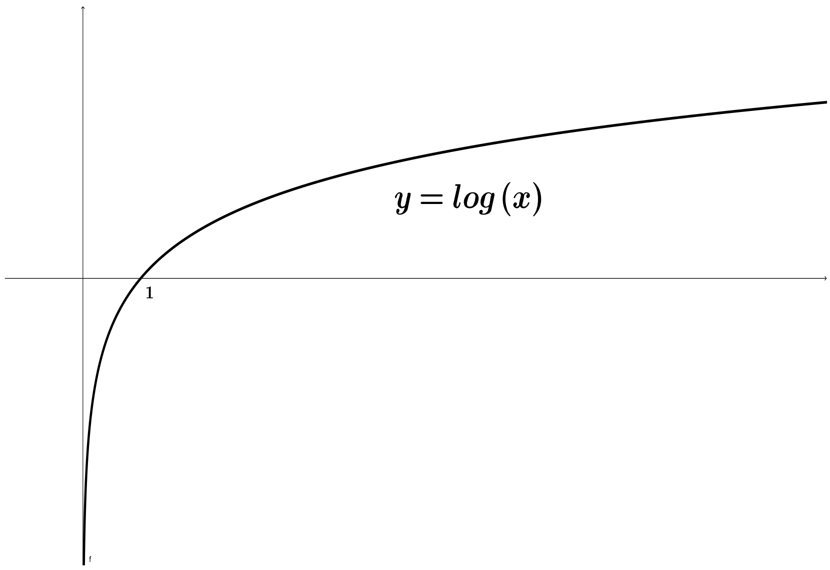
$$\log_e x = \log x$$

o anche

$$\log_e x = \ln x$$

Il logaritmo in base e è detto anche *logaritmo naturale.*

Osserviamo esplicitamente che, essendo $e = 2{,}7 \ldots$ un numero maggiore di uno, il suo grafico ha un andamento del tipo



5.13 Le proprietà dei logaritmi

I logaritmi godono di importanti proprietà, che sono analoghe alle proprietà delle potenze elencate in precedenza.

Le dimostrazioni di questi risultati, che non riporteremo (e che bisogna conoscere), si trovano in ogni libro di testo.

1) $\log_b x + \log_b y = \log_b(x \cdot y)$
2) $\log_b x - \log_b x = \log_b \left(\frac{x}{y}\right)$
3) $\log_b x^\alpha = \alpha \cdot \log_b x$

Esempio 1.
Esprimiamo in un unico logaritmo l'espressione

$$\log_3 5 + \log_3 2$$

Dalla proprietà 1) segue che l'espressione è uguale a

$$\log_3 10$$

Esempio 2.
Esprimiamo in un unico logaritmo l'espressione

$$\log_{\frac{1}{2}} 20 - \log_{\frac{1}{2}} 2$$

Dalla proprietà 2) segue che l'espressione è uguale a

$$\log_{\frac{1}{2}} 10$$

Esempio 3.
Esprimiamo in un unico logaritmo l'espressione

$$3 \cdot \log_5 2$$

Applicando la proprietà 3) si ottiene

$$\log_5(2^3)$$

ovvero

$$\log_5 8$$

5.14 Formula del cambiamento di base e una sua conseguenza

Esiste una formula, detta *formula del cambiamento di base*, che consente di esprimere il logaritmo di una qualche base *b* in un'espressione che contiene solo logaritmi in una base a piacere *c*.

La formula è

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$$

La dimostrazione, che non riportiamo, è contenuta in ogni libro di testo.

Esempio

Esprimiamo $\log_2 5$ in un'espressione che contenga logaritmi in base *8*.

Per la formula del cambiamento di base

$$\log_2 5 = \frac{\log_8 5}{\log_8 2}$$

E' possibile ricavare un'espressione più semplice per $\log_8 2$: posto $y = \log_8 2$, applicando la definizione otteniamo $8^y = 2$, ovvero $2^{3y} = 2^1$ da cui $3y = 1$ e quindi $y = \frac{1}{3}$.

Perciò

$$\log_2 5 = 3 \cdot \log_8 5$$

Esercizio.
a) Esprimi in logaritmo in base *3* il $\log_9 4$;

b) Esprimi come logaritmo in base *9* il $\log_3 4$.

Dalla formula del cambiamento di base si può ricavare la seguente formula:

$$\log_b x = -\log_{\frac{1}{b}} x$$

ovvero *due logaritmi che hanno le basi reciproche sono opposti*.

La formula si ricava come immediata conseguenza del cambiamento di base:

$$\log_b x = \frac{\log_{\frac{1}{b}} x}{\log_{\frac{1}{b}} b}$$

e la formula segue subito osservando che $\log_{\frac{1}{b}} b = -1$.

Esempio.
Dalla formula vista segue subito $\log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x$

Esercizio.
Esprimi in logaritmo di base *3* il $\log_{\frac{1}{3}} 4$.

5.15 Equazioni e disequazioni esponenziali risolubili con logaritmi

Sappiamo già risolvere alcune equazioni e disequazioni esponenziali: ad esempio

- $2^x = 8$

- $27^{2x} = \frac{1}{3}$
- $5^{1-x} < 125$

Queste sono tutti problemi risolubili senza l'ausilio dei logaritmi, perché è possibile confrontare *potenze con la stessa base*: grazie alla iniettività e alla monotonia della funzione esponenziale è possibile ottenere una relazioni tra gli argomenti.

Ora vedremo come risolvere equazioni e disequazioni più generali, ad esempio $3^x = 5$ o $2 \cdot 3^x < 7^x$.

Risolviamo ora qualche equazione e disequazione significativa: i procedimenti utilizzati ci permetteranno di affrontare altre disequazioni dello stesso tipo.

Esempio 1.
Risolviamo

$$3^{x-1} = 5$$

Poiché $(x-1)$ è l'esponente da attribuire alla base 3 per ottenere *5*, dalla definizione di logaritmo segue che

$$x - 1 = \log_3 5$$

e, dunque, $S: x = \log_3 5 + 1$.

In genere, per ragioni di omogeneità, è preferibile esprimere la soluzione in funzione di logaritmi in base naturale o base *10*.

Procediamo così: da

$$3^{x-1} = 5$$

applichiamo ad ambo i membri il logaritmo naturale (ad esempio) e otteniamo

$$\log(3^{x-1}) = \log 5$$

applichiamo la proprietà 3) dei logaritmi

$$(x-1)\log 3 = 5$$

Abbiamo trasformato l'equazione esponenziale iniziale in una comune equazione algebrica di primo grado: infatti, $\log 3$ non è altro che un numero.

Svolgiamo i calcoli e isoliamo l'incognita

$$x \log 3 - \log 3 = 5$$

$$x \log 3 = 5 + \log 3$$

$$x = \frac{5 + \log 3}{\log 3}$$

La soluzione è perciò $S = \left\{\frac{5+\log 3}{\log 3}\right\}$.

Le soluzioni ottenute coi due procedimenti coincidono, come si può facilmente verificare utilizzando la formula del cambiamento di base.

Esempio 2.
Risolviamo

$$5^x < 7 \cdot 3^{2x}$$

Applichiamo il logaritmo naturale ai due membri

$$\log 5^x < \log(7 \cdot 3^{2x})$$

Grazie alle proprietà dei logaritmi otteniamo

$$x \cdot \log 5 < \log 7 + \log(3^{2x})$$

$$x \cdot \log 5 < \log 7 + 2x \cdot \log(3)$$

Abbiamo così ottenuto una *disequazione algebrica di primo grado*: per risolverla, è sufficiente isolare la x.

$$x \cdot \log 5 - 2x \cdot \log(3) < \log 7$$

raccogliamo x

$$x \cdot (\log 5 - 2 \cdot \log(3)) < \log 7$$

Ora dobbiamo dividere per $\log 5 - 2 \cdot \log(3)$: *attenzione!* Prima dobbiamo stabilire se si tratta di un numero positivo o negativo (stiamo risolvendo una *disequazione)*.

Poiché $\log 5 - 2 \cdot \log(3) = \log 5 - \log 3^2 = \log \frac{5}{9}$, da un esame del grafico di $y = \log x$ deduciamo che si tratta di una quantità negativa, perciò

$$x > \frac{\log 7}{(\log 5 - 2 \cdot \log(3))}$$

e operando le dovute semplificazioni,

$$S: x > \frac{\log 7}{\log \frac{5}{9}}$$

Per la formula del cambiamento di base possiamo anche scrivere $S: x > \log_{\frac{5}{9}} 7$.

Esercizio.
Risolvi le seguenti equazioni e disequazioni esponenziali utilizzando, all'occorrenza, i logaritmi.

a) $2^x = 3$

b) $5^{x+1} = 3^{2x}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} < 3^{x+2}$

d)$3^x + 3^{x+1} + 3^{x-1} < 9$

5.16 Le equazioni logaritmiche

Chiamiamo *equazione logaritmica* un'equazione che ha l'incognita nell'argomento di un logaritmo.

E' un'equazione logaritmica, ad esempio,

$$3 \cdot \log_4(x+3) = 8 - \log_2 3$$

Non è un'equazione logaritmica

$$2x + \log_3 4 = 2$$

Si chiama *soluzione* dell'equazione un numero che

1) può essere sostituito al posto della incognita
2) rende vera l'uguaglianza

Grazie alla iniettività della funzione logaritmica sappiamo che da una relazione di uguaglianza fra due logaritmi con la stessa base possiamo ottenere un'uguaglianza fra i rispettivi esponenti.

Ad esempio, data

$$\log_2(x^2 - 4) = \log_2 5$$

scopriamo subito i valori *sostituibili* al posto dell'incognita, ovvero le *condizioni di esistenza* dei termini contenuti nell'equazioni: questi sono i valori di x per cui $x^2 - 4 > 0$, perciò

$$CE: x < -2 \vee x > 2$$

Per l'iniettività del logaritmo possiamo dedurre che

$$x^2 - 4 = 5$$

da cui

$$x = -3 \vee x = 3$$

Confrontando i valori trovati con le *CE* otteniamo quindi

$$S = \{3\}$$

Per risolvere una equazione esponenziale, dobbiamo ricondurci a una forma del tipo

$$\log_b f(x) = \log_b g(x)$$

che possiamo chiamare *equazione in forma normale.*

Una volta trovate le condizioni di esistenza, per la proprietà iniettiva seguirà poi

$$f(x) = g(x)$$

Esempio 1.
Risolviamo

$$\log_2(x - 5) = 3$$

Le condizioni di esistenza sono

$$CE: x > 5$$

Possiamo esprimere *3* come un logaritmo in base *2*, per confrontare poi i due logaritmi.

Posto $3 = \log_2 t$ e applicando la definizione del logaritmo otteniamo $2^3 = t$, dunque $3 = \log_2 8$.

L'equazione diventa quindi

$$\log_2(x-5) = \log_2 8$$

e, per l'iniettività

$$x - 5 = 8$$

e, infine

$$x = 13$$

Il valore trovato è compatibile con le condizioni di esistenza, perciò

$$S = \{13\}$$

Esempio 2.
Risolviamo

$$\mathrm{Log}(2x-1) + \mathrm{Log}(3+x) = \mathrm{Log}(x^2+3)$$

Determiniamo anzitutto le condizioni di esistenza, individuate dal sistema

$$CE: \begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ 3 + x > 0 \end{cases}$$

che, risolto, dà

$$CE: x > \frac{1}{2}$$

Applichiamo ora le proprietà dei logaritmi al primo membro

$$\mathrm{Log}[(2x-1)(3+x)] = \mathrm{Log}(x^2+3)$$

e, svolgendo i calcoli

$$\mathrm{Log}(2x^2+5x-3) = \mathrm{Log}(x^2+3)$$

Per la proprietà iniettiva

$$2x^2 + 5x - 3 = x^2 + 3$$

ovvero

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

che ha per soluzioni

$$x = -6 \vee x = 1$$

Soltanto *1* è accettabile, perciò

$$S = \{1\}$$

Esempio 3.
Risolviamo

$$\log^2{}_3 x + \log_3 x - 2 = 0$$

Le condizioni di esistenza sono

$$CE: x > 0$$

L'equazione si può interpretare come equazione algebrica di secondo grado, di incognita $\log_3 x$.

Per comodità, posto $\log_3 x = t$ l'equazione diviene

$$t^2 + t - 2 = 0$$

che ha per soluzioni $t = -2 \vee t = 1$.

- se $t = -2 \Rightarrow \log_3 x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$
- se $t = 1 \Rightarrow \log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3$

Entrambe le soluzioni sono accettabili, perciò $S = \left\{\frac{1}{9}, 3\right\}$.

Esercizio.
Risolvi le seguenti equazioni logaritmiche

a) $\log_2(x-1) = 1$

b) $\log_2(x-1) = 0$

c) $\log_{\frac{1}{2}}|x| = \log_2 x$

d) $2\log^2 x + \log x - 3 = 0$

5.17 Le disequazioni logaritmiche

Chiamiamo *disequazioni logaritmiche* le disequazioni che hanno l'incognita che compare nell'argomento di un logaritmo.

E' una disequazione logaritmica, ad esempio

$$5 \cdot \log_3 x < 4$$

Non è una equazione esponenziale

$$\log_4 4 \cdot x \geq 3$$

Si chiama *soluzione* della disequazione un numero che

1) può essere sostituito al posto della incognita
2) rende vera la disuguaglianza

Grazie alla *proprietà di monotonia* della funzione logaritmica (la crescenza o la decrescenza) sappiamo che da una relazione di disuguaglianza fra due logaritmi con la stessa base possiamo ottenere una disuguaglianza fra i rispettivi argomenti: se la funzione è *crescente*, potenze ed esponenti sono *concordi*, mentre se è *decrescente* sono *discordi*.

Ad esempio, da

$$\log_2(x-3) < \log_2 5$$

possiamo dedurre, visto che la funzione $y = \log_2 x$ è crescente

$$x - 3 < 5$$

da cui, infine

$$x < 8$$

Poiché le condizioni di esistenza sono $CE: x > 3$, la soluzione della disequazione è $S =]3,8[$.

Per risolvere una disequazione logaritmica, dobbiamo ricondurci – *dopo aver determinato le condizioni di esistenza* - a una forma del tipo

$$\log_b f(x) \gtrless \log_b g(x)$$

che possiamo chiamare *disequazione in forma normale.*

Applicando la proprietà di monotonia, perverremo a una disequazione del tipo

$$f(x) \lesseqgtr g(x)$$

che, risolta e confrontata con le condizioni di esistenza, ci fornirà la soluzione della disequazione.

Esempio 1.
Risolviamo

$$\log_2 x \leq 1$$

Le condizioni di esistenza sono $CE: x > 0$.

Esprimiamo *1* come un logaritmo in base *2*: da $1 = \log_2 t$, applicando la definizione otteniamo $2^1 = t$; perciò

$$\log_2 x \leq \log_2 2$$

Poiché la funzione logaritmo in base *2* è *crescente*, passando agli argomenti otteniamo

$$x \leq 2$$

che confrontati con le CE otteniamo la soluzione

$$S: 0 < x \leq 2$$

Esempio 2.
Risolviamo

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x + 2) < 0$$

Le condizioni di esistenza sono $CE: x > -\frac{2}{3}$.

Esprimiamo *0* come logaritmo in base $\frac{1}{2}$: $0 = \log_{\frac{1}{2}}(1)$, dunque

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x + 2) < \log_{\frac{1}{2}}(1)$$

da cui, poiché $\mathrm{y} = \log_{\frac{1}{2}}(x)$ è decrescente,

$$3x + 2 < 1$$

che, risolta

$$x < -\frac{1}{3}$$

Confrontando con le CE otteniamo la soluzione $S = \left]-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right[$.

Esempio 3.
Risolviamo

$$\log|x-1| > 0$$

Le condizioni di esistenza sono la soluzione di $|x-1| > 0$, perciò

$$CE: x \neq 1$$

Esprimiamo *0* come logaritmo naturale: da $0 = \log t$, da cui $e^0 = t$ e quindi $t = 1$. Allora

$$\log|x-1| > \log 1$$

Il logaritmo naturale è crescente, dunque

$$|x-1| > 1$$

ovvero

$$x - 1 < -1 \vee x - 1 > 1$$

che, risolta

$$x < 0 \vee x > 2$$

Confrontando con le condizioni di esistenza otteniamo la soluzione

$$S: x < 0 \vee x > 2$$

Esempio 4.
Risolviamo

$$\frac{1}{2}\log_2 x - \log_4(x^2) > 2$$

Anzitutto occupiamoci delle condizioni di esistenza: sono soluzione del sistema

$$CE: \begin{cases} x > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases}$$

dunque $CE: x > 0$.

Osserviamo ora che nella disequazioni compaiono logaritmi con *base diversa*: per applicare le proprietà dei logaritmi occorre operare con logaritmi *nella stessa base*: trasformiamo perciò il logaritmo in base 2 in un'espressione che contiene logaritmi in base *4*.

Per la formula del cambiamento di base

$$\log_2 x = \frac{\log_4 x}{\log_4 2}$$

ed essendo $\log_4 2 = \frac{1}{2}$

$$\log_2 x = 2\log_4 x$$

La disequazione diventa pertanto

$$\log_4 x - \log_4(x^2) > 2$$

poiché $\log_4(x^2) = 2\log_4 x$

$$\log_4 x - 2\log_4 x > 2$$

ovvero

$$\log_4 x < -2$$

Visto che $-2 = \log_4 \frac{1}{16}$

$$\log_4 x < log_4 \frac{1}{16}$$

e, per la crescenza del logaritmo $x < \frac{1}{16}$; confrontando con le condizioni di esistenza otteniamo la soluzione $S: 0 < x < \frac{1}{16}$.

Esempio 5.
Risolviamo

$$\log^2{}_3 x + \log_3 x - 2 < 0$$

Anzitutto le condizioni di esistenza: $CE: x > 0$.

Dopodiché osserviamo che la disequazione è interpretabile come una disequazione algebrica di secondo grado, con incognita $\log_3 x = t$.

Perciò

$$t^2 + t - 2 < 0$$

Risolvendo l'equazione associata $t^2 + t - 2 = 0$ otteniamo $t = -2 \vee t = 1$; per cui la disequazione ha soluzione

$$-2 < t < 1$$

e, ricordando che $\mathrm{t} = \log_3 x$

$$-2 < \log_3 x < 1$$

Ciò equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} \log_3 x > -2 \\ \log_3 x < 1 \end{cases}$$

- $\log_3 x > -2 \Rightarrow \log_3 x > \log_3 \frac{1}{9} \Rightarrow x > \frac{1}{9}$
- $\log_3 x < 1 \Rightarrow \log_3 x < \log_3 3 \Rightarrow x < 3$

e, risolvendo il sistema

$$\frac{1}{9} < x < 3$$

Confrontando con le condizioni di esistenza otteniamo infine la soluzione $S = \left]\frac{1}{9}, 3\right[$.

Esempio 6.
Risolviamo

$$x^x < 1$$

Anzitutto le condizioni di esistenza:

$$CE: x > 0.$$

Ricordando che $x^x = e^{x \log x}$ otteniamo

$$e^{x \log x} < 1$$

e, poiché $1 = e^0$

$$e^{x \log x} < e^0$$

e, per la crescenza della funzione $y = e^x$

$$x \log x < 0$$

Per le condizioni di esistenza $x > 0$, dunque dividendo per x ambo i membri

$$\log x < 0$$

Essendo $0 = \log 1$

$$\log x < \log 1$$

da cui $x < 1$.

Confrontando con le condizioni di esistenza si ottiene la soluzione $S: 0 < x < 1$.

5.18 Esercizi proposti

1.	a) Rappresenta in un unico riferimento cartesiano la funzione $y = 2^x$ e la funzione $y = 3^x$; b) Rappresenta in un unico riferimento cartesiano la funzione $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e la funzione $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.		
2.	Rappresenta in un riferimento cartesiano la funzione esponenziale $y = a^x$, con $a > 1$ e con $0 < a < 1$. • Indica il dominio e il codominio della funzione nei due casi; • descrivi il segno; • stabilisci se la funzione è iniettiva e invertibile; • stabilisci se la funzione è monotona.		
3.	Spiega perché non è possibile definire l'espressione a^x per ogni $x \in \mathbb{R}$, nel caso in cui a sia un numero negativo o nullo.		
4.	Determina per quali valori del parametro hanno senso le seguenti scritture a) $(k^2-1)^2$ b) $(k^2-1)^{\sqrt{2}}$ c) $(k-3)^{-2}$ d) $(k-3)^{-\sqrt{2}}$		
5.	Determina il dominio delle seguenti funzioni a) $y = x^2$ b) $y = 3^x$ c) $y = x^x$ d) $y = e^{\sqrt{x-1}}$ e) $y = \frac{1}{e^{\sqrt{x}}} + x^3$ f) $y = \frac{x^2+1}{2^x-1}$ g) $y = \frac{1}{\sqrt{2^x-1}}$		
6.	Traccia il grafico delle seguenti funzioni a) $y = 2^{-x}$ b) $y = -2^x$ c) $y = 2^{x-3}$ d) $y = 2^{\lvert x \rvert}$ e) $y = \lvert 2^x - 1 \rvert$ f) $y = \left\lvert 3 - 3^{-\lvert x \rvert} \right\rvert$		
7.	Senza utilizzare la calcolatrice, stabilisci se $(5-\pi)^{\sqrt{2}} < (5-\pi)^{\sqrt{3}}$ o $(5-\pi)^{\sqrt{2}} > (5-\pi)^{\sqrt{3}}$.		
8.	Discuti, al variare del parametro k, l'esistenza e il numero delle soluzioni di $a^x = k, a > 0$.		
9.	Risolvi le seguenti equazioni esponenziali elementari $a)$ $3^x = \frac{1}{9}$ b) $5^x = 2 - \sqrt{5}$ c) $e^{\frac{x-2}{x-1}} = 1$ d) $2^{x-1} = \sqrt{8^x}$		
10.	Risolvi le seguenti equazioni esponenziali a) $2^{x+1} - 2^x + 2^{x-2} = 5$ b) $2^x + 2^{5-x} = 12$ c) $5^{x+1} + 20 \cdot 5^x = 3^{x+3} - 2 \cdot 3^{x+2}$ d) $2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$ e) $2^{\sqrt{4x}} - 5 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 4 = 0$		
11.	Determina le soluzioni della seguente disequazione esponenziale al variare del parametro k		

	$\left(\frac{1}{2}\right)^x < k$		
12.	Risolvi le seguenti disequazioni esponenziali a) $2^x > \frac{1}{4}$ b) $\sqrt{2^x} > 4^x$ c) $e^x + e > 1$ d) $\lvert 2^x - 1\rvert \geq 3$ e) $(x^2 - x) \cdot e^{x+1} < 0$ f) $(4^x - 1)^2 \geq 49$ g) $3^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \frac{10}{3}$ h) $e^{\frac{x-1}{x-2}} \geq 0$ i) $e^{\frac{1}{x}} < \frac{1}{e^{-x+1}}$ l) $\frac{e^x - 1}{x+2} < 0$ m) $\frac{1}{2^x - 4} + \frac{1}{2^x + 4} \leq \frac{16}{4^x - 16}$ n) $2^x - 2 \geq \sqrt{2^x}$ o) $3^{\frac{2}{x}} - 3^{\frac{1}{x}} - 2 < 0$ p) $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 > 0$ q) $3^x - 2 \cdot 3^{2-x} < 7$		
13.	Risolvi graficamente le seguenti equazioni a) $2^{-x} = 2x^2$ b) $2^{\lvert x\rvert} = -x + 1$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x + x = 0$		
14.	Date le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = \lvert x - 1\rvert$ determina l'espressione analitica delle funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$ e rappresentale graficamente.		
15.	Traccia il grafico della funzione $y = f(x) = \lvert 4 - 2^{-x}\rvert$, determinando il dominio, il codominio e l'asintoto orizzontale. Discuti , al variare del parametro, il numero delle soluzioni di $\lvert 4 - 2^{-x}\rvert = k$. Determina i valori di a e b in modo che la funzione $y = g(x) = 2^{x+a} + b$ intersechi gli assi cartesiani negli stessi punti della funzione f. Infine, risolvi graficamente $f(x) \geq g(x)$.		
16.	a) Rappresenta in un unico riferimento cartesiano le funzioni $y = \log_2 x$ e $y = \log_3 x$. b) Rappresenta in un unico riferimento cartesiano le funzioni $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ e $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.		
17.	Rappresenta in un riferimento cartesiano la funzione logaritmica $y = \log_b x$, con $b > 1$ e con $0 < b < 1$. • Indica il dominio e il codominio della funzione nei due casi; • descrivi il segno; • stabilisci se la funzione è iniettiva e invertibile; • stabilisci se la funzione è monotona.		
18.	Spiega perché non è possibile definire la funzione logaritmo con la base uguale ad 1.		
19.	Enuncia e dimostra le proprietà del logaritmo.		

20.	Dimostra che per ogni $b>0, b\neq 1$ e per ogni $x>0$ vale $b^{\log_b x}=x$.		
21.	Dimostra che a) $\log_b x = -\log_{\frac{1}{b}} x$ b) $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$		
22.	Determina i valori del parametro che danno un senso alle seguenti scritture a) $\log_2(k-3)$ b) $\log_{k^2} 5$ c) $\log_{k-3}(5-k)$		
23.	Determina il dominio delle seguenti funzioni a) $y=\log_2\lvert x\rvert+\log(x-1)$ b) $y=\frac{\log(x^2-1)}{\log x}$ c) $y=\frac{\log x}{x-2}$ d) $y=\log(x^2-x)$ e) $y=\log_3\left(2-\sqrt{x-1}\right)$ f) $y=\log\frac{x-1}{2^x-4}$ g) $y=\log_2\frac{1}{x}+3^{\frac{1}{x}}$ h) $y=\log\lvert\log x\rvert$		
24.	Traccia il grafico delle seguenti funzioni a) $y=-\log x$ b) $y=\log(-x)$ c) $y=\lvert\log x\rvert$ d) $y=\log_2(x+1)$ e) $y=\log_2(x-1)+2$ f) $y=\lvert\log_2\lvert x\rvert\rvert$ g) $y=\left\lvert\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\right\rvert+\frac{\lvert x\rvert}{x}$ h) $y=\log\left(\frac{1}{x}\right)$		
25.	Determina il valore dei seguenti logaritmi a) $\log_3 27$ b) $\log_{\frac{1}{2}} 2$ c) $\log_2\sqrt{2}$ d) $\log_{\sqrt{2}} 2$ e) $Log(0{,}1)$ f) $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{9}{4}\right)$		
26.	Determina i valori della variabile x affinché siano verificate le seguenti uguaglianze a) $\log_x 8=3$ b) $\log_x\frac{1}{2}=-1$ c) $\log_x 1=0$ d) $\log_x x=2$ e) $\log x=3$ f) $\log_{25} x=-2$ g) $\log_{\frac{1}{3}} x=2$		
27.	Esprimi come logaritmo nella base b indicata i seguenti numeri a) $3, b=2$ b) $2, b=\frac{1}{2}$ c) $6, b=6$ d) $5, b=\frac{1}{5}$		
28.	Determina il doppio del numero $\log_2 3$.		
29.	Esprimi in logaritmi in base e e in base 10 il numero $\log_5 3$.		

30.	Disponi in ordine crescente i numeri $\log_3 7, \log_5 17, \log_6 20$.		
31.	Calcola a) $2^{\log_4 3}$ b) $4^{\log_8 5}$ c) $\left(\sqrt{e}\right)^{\log 3}$		
32.	Calcola a) $\log_2 \frac{4\sqrt[3]{2}}{\sqrt{8}}$ b) $\log \frac{e}{\sqrt[3]{e}}$ c) $\frac{2}{3}\log 27 + \frac{3}{4}\log 16$		
33.	Cosa puoi dedurre dal parametro a se a) $\log_a 3 < 0$ b) $\log_a 7 < \log_a 4$		
34.	Risolvi la seguente equazione e indica quale proprietà della funzione logaritmo hai utilizzato $2^x = 3$		
35.	Risolvi la seguente equazione e indica quale proprietà della funzione logaritmo hai utilizzato $2^x < 3$		
36.	Risolvi le seguenti equazioni esponenziali, risolubili mediante logaritmi a) $2^{x-3} = 5$ b) $2^{x-1} = 7^{2x}$ c) $3^x \cdot 4 = 5 \cdot 7^{x+1}$ d) $3^{2x} + 9^{x+1} = 2$ e) $15 + 4^x = 2^{x+3}$		
37.	Risolvi le seguenti disequazioni esponenziali, risolubili mediante logaritmi a) $3^{x-1} < 2$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < 5$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} > 4$ d) $\frac{2}{3} < 2^{1-x}$ e) $15 + 4^x = 2^{x+3}$ f) $3^{x+1}2 \cdot 3^{2-x} > 29$ g) $9^x - 10 \cdot 3^x + 25 > 0$ h) $2^{2x} < 3^{x+1}$		
38.	Discuti – eventualmente utilizzando la via grafica - al variare del parametro k le soluzioni di $\log_b x = k$ con $0 < b < 1$ e con $b > 1$.		
39.	Risolvi le seguenti equazioni logaritmiche a) $\log(2x-1) + \log(3+x) = \log(x^2+1)$ b) $\log \frac{x+3}{x^2} = \log(4-x)$ c) $\log(x-4)^2 = 5$		

	d) $\log^2(x-4)=5$ e) $\log_3(x-1)+\log_3(x+1)=3$ f) $3\log(x+1)=\log(x^3+3x+7)$ g) $\log_{\frac{3}{4}}(x+1)=-1$ h) $\log_3\lvert 3-2x\rvert=2$ i) $(\log_2 x)^2+\log_2 x-2=0$ l) $\log^2 x+4\log x-5=0$ m) $\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{2\ln x-1}=2$ n) $\frac{\log(x+7)}{\log(x+1)}=2$ o) $2^{2\log_2 x}-4^{\log_2\sqrt{x}}=2$		
40.	Deduci informazioni sulle – eventuali – soluzioni delle seguenti equazioni, utilizzando la via grafica a) $\log_2 x=x-2$ b) $\log_{\frac{1}{2}} x=1-x^2$ c) $x\log x=4$ d) $\lvert\log_2 x\rvert=\sqrt{9-x^2}$		
41.	Risolvi le seguenti disequazioni logaritmiche, in funzione della base b a) $\log_b x>0$ b) $\log_b x<0$ c) $\log_b x>1$ d) $\log_b x<1$ e) $\log_b x>2$ f) $\log_b x<2$		
42.	Risolvi le seguenti disequazioni logaritmiche a) $\log_2 x<5$ b) $\log_{\frac{1}{2}} x<5$ c) $\log_2(1-x^2)-1<0$ d) $\log_5(3x^2+2x)\geq 1$ e) ${\log_2}^2 x+\log_2 x-2>0$ f) $\log_2 x-2\log_x 2+1\geq 0$ g) $\log_3[\log_2(x-1)]<0$ h) $\log_2 x+\log_2(x-2)<1$ i) $\frac{1}{2}\log_2 x+\log_4 x>2$		
43.	Risolvi le seguenti disequazioni fratte a) $\frac{1}{\mathrm{Log}\, x}<1$ b) $\frac{\log_2(x+2)}{x^2-9}\geq 0$ c) $\frac{\log\lvert x-2\rvert}{x}\leq 0$		
44.	Traccia il grafico della funzione $y=\log_x x^x$.		
45.	Risolvi le seguenti disequazioni a) $x\log x>0$ b) $x^x>1$		
46.	Risolvi le seguenti disequazioni a) $e^x+x^2<0$ b) $(x-3)e^{-x^2}\leq 0$ c) $e^{\lvert\log x\rvert}>2$ d) $\sqrt{\lvert 2^x-1\rvert-1}>-1$ e) $\log_3(2senx)>0, x\in[0,2\pi[$ f) $arc\ sen\left(\frac{1}{2+e^x}\right)\geq\frac{\pi}{6}$ g) $2^x\cdot(x^2-1)\sqrt{x}\leq 0$		
47.	Considera la funzione $f(x)=\log_a(x+2)$. a) Determina per quali valori di a la funzione è crescente.		

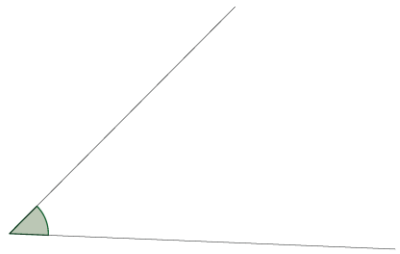
	b) Trova per quale valore di a $f(2) = 1$. c) In corrispondenza di questo valore rappresenta le funzioni $y = f(x), y = f(\|x\|)$ e $y = \|f(x)\|$. d) Stabilisci quale delle precedenti funzioni è invertibile, tracciane il grafico e determina la corrispondente rappresentazione analitica.		

Goniometria

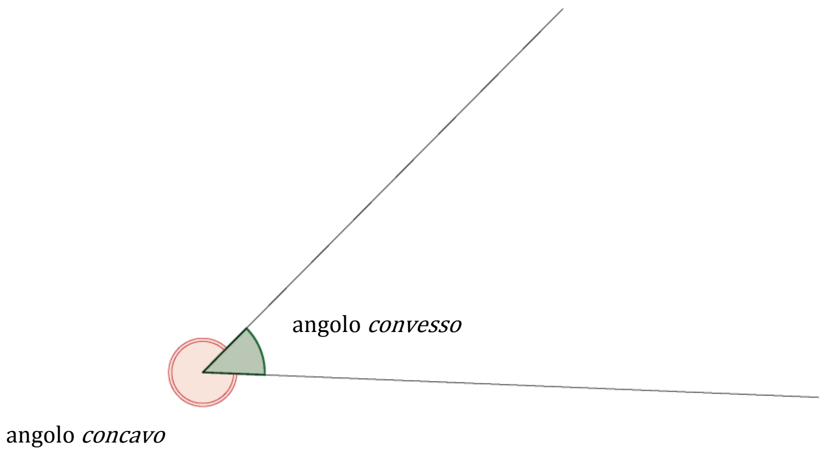
6.1 Funzioni goniometriche

1.1 Angoli radianti

Dalla geometria euclidea sappiamo che *un angolo è una parte di piano individuato da due semirette aventi l'origine in comune.*



Naturalmente due semirette con l'origine in comune individuano *due* angoli:



L'angolo che contiene il prolungamento dei lati è detto *concavo,* l'altro convesso.

Per misurare gli angoli negli studi precedenti hai utilizzato *i gradi*: ad esempio dicevamo che l'angolo retto misura 90 gradi, l'angolo piatto 180 gradi e così via.

I gradi sono un sistema di misurazione *sessagesimale*, ovvero in base *60* : sottomultipli del grado sono i *primi (* $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^o$) e sottomultipli dei primi sono i *secondi*

$(1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3600}\right)^o$). I secondi sono a loro volta divisi in decimi e centesimi.

Ad esempio la scrittura 6° 11’ 23’’,58 indica la misura di *6* gradi, *11* primi, *23* secondi e *58* centesimi di secondi.

Una misurazione in gradi può anche essere espressa in forma *decimale:* ad esempio la scrittura 43,65° indica *43* gradi e *65* centesimi di grado.

E’ possibile passare da una misurazione in gradi sessagesimale a una misurazione in gradi decimale, come indicato nei seguenti esempi.

Esempio 1.
Trasformiamo in forma decimale la misura dell’angolo 7° 43’ 2’’,58.

Basta osservare che $7°\ 43'\ 2'', 58 = \left(7 + \frac{43}{60} + \frac{2}{3600} + \frac{58}{100} \cdot \frac{1}{3600}\right)^{o} \approx 7{,}72^{o}$

Esempio 2.
Trasformiamo in forma sessagesimale la misura dell’angolo 76,38°.

Vale

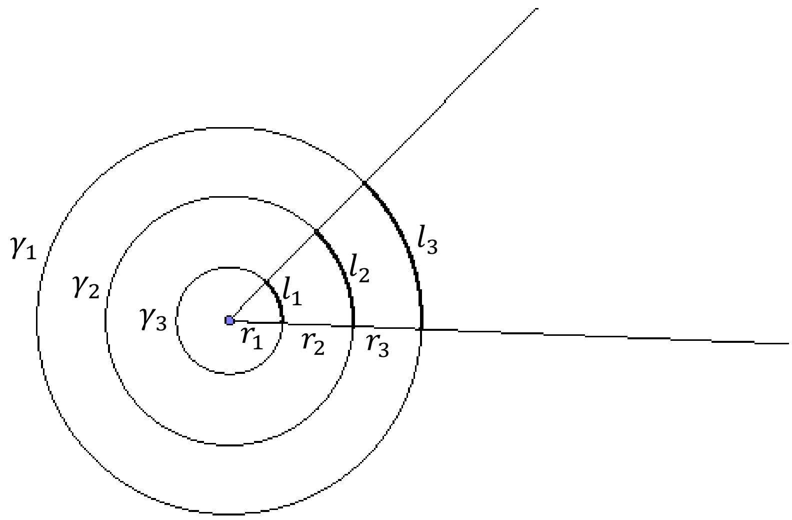
$76{,}38° = 76° + 0{,}38° = 76° + 0{,}38 \cdot 60' = 76° + 22', 8 = 76° + 22' + 0', 8 =$

$76° + 22' + 0{,}8 \cdot 60'' = 76° + 22' + 48'' = 76°\ 22'\ 48''$

A causa del sistema sessagesimale il grado non è sempre una unità di misura comoda.

Vogliamo ora supplire a questo inconveniente e dare una nuova unità di misura che consenta di misurare i gradi utilizzando i numeri reali.

A tal scopo consideriamo un angolo α e prendiamo a titolo d’esempio le circonferenze γ_1, γ_2 e γ_3 centrate nel vertice.



Rimangono così individuati i raggi r_1, r_2, r_3 e gli archi corrispondenti l_1, l_2 ed l_3.

Dagli studi passati sappiamo che *il rapporto tra gli archi e i raggi è costante*, ovvero

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2} = \frac{l_3}{r_3}$$

Il valore di questi rapporti dipende unicamente dall'ampiezza dell'angolo: è lecito quindi assumerlo come misura dell'angolo.

Precisamente:

dato un angolo e una circonferenza centrata nel vertice, chiamiamo *misura dell'angolo in radianti*, e lo indichiamo con α^r, il rapporto

$$\frac{l}{r}$$

dove l è la misura dell'arco individuato dall'angolo e r è la misura del raggio della circonferenza.

L'unità di misura in radianti è dunque individuata quando stacca su una circonferenza un arco uguale al suo raggio (se $l = r, \alpha^r = 1$).

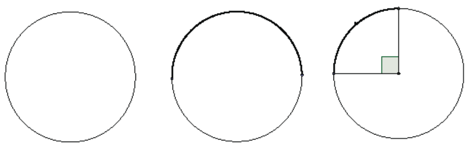
Poiché è irrilevante la circonferenza che consideriamo, possiamo scegliere la circonferenza di raggio unitario: è così possibile avere un'idea intuitiva di angolo radiante.

In questo caso

$$\alpha^r = \frac{l}{1} = l\, rad$$

perciò possiamo interpretare la misura in radianti di un angolo come *la lunghezza dell'arco di circonferenza unitaria* individuato dall'angolo.

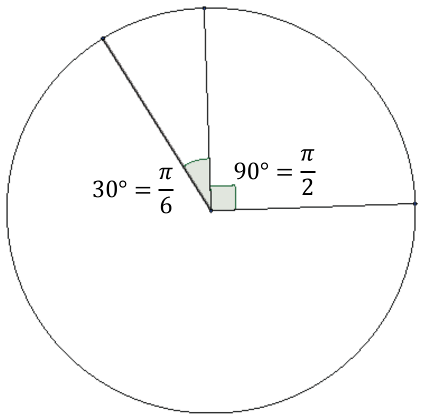
In generale una circonferenza di raggio r misura $2\pi r$; la lunghezza della circonferenza unitaria vale dunque 2π e metà circonferenza misura π; un quarto di circonferenza misura, evidentemente, $\frac{\pi}{2}$.



Dunque l'angolo giro (che misura con i "vecchi" gradi 360) misura 2π radianti, circa 6,2 *rad*; l'angolo piatto (180°) misura $\pi\, rad$ (circa *3); a 90°* corrisponde la misura in radianti $\frac{\pi}{2}$, a 45° è associata la misura in radianti $\frac{\pi}{4}$.

L'angolo di misura 30°, essendo un sesto dell'angolo piatto ($= \pi\, rad$) misura perciò in radianti $\frac{\pi}{6}$. Allo stesso modo l'angolo di 60° ($\frac{1}{3}$ dell'angolo piatto) misura $\frac{\pi}{3}\, rad$.

Per individuare la misura in radianti ad esempio dell'angolo di 120°



osserviamo che la lunghezza dell'arco individuato è ottenuto dalla lunghezza dell'arco individuato da 90° e dall'arco individuato da 30°, ovvero a 120° corrisponde l'angolo radiante $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$.

Come esercizio realizza una tabella di conversione fra gli angoli in gradi sessagesimali e gli angoli in radianti degli angoli

- multipli di 90°
- multipli di 30°
- multipli di 45°

Esiste una relazione fra le misure di un angolo espresse in gradi sessagesimali e in gradi radianti:

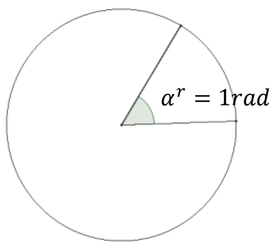
$$180°: \alpha° = \pi: \alpha^r$$

Possiamo utilizzare questa relazione per scoprire a quanti gradi (sessagesimali) corrisponde un radiante.

Poiché $\alpha^r = 1$, sostituendo otteniamo

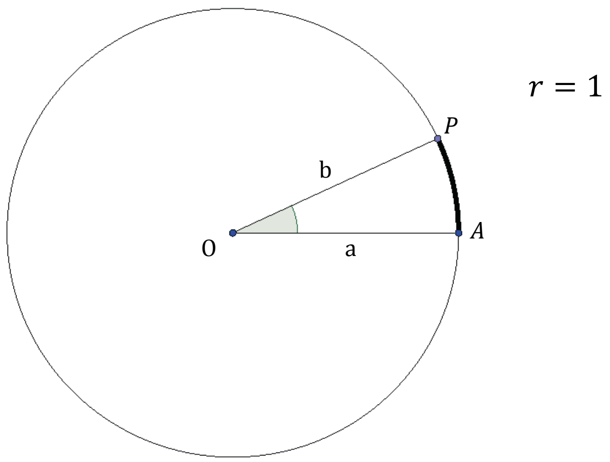
$$180°: \alpha° = \pi$$

da cui $\alpha° = \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}2958° \approx 57°\,17'\,44{,}8''$.



Riassumendo:

dato un angolo $\alpha = aOb$, è possibile definirne una misura prendendo la circonferenza di raggio 1 centrata nel vertice



La misura dell'angolo è la lunghezza dell'arco $\widehat{AP}$.

In questo modo a ogni angolo sessagesimale da 0° a 360° è associato biunivocamente un numero reale da 0 a 2π.

$$[0°, 360°] \leftrightarrow [0,2\pi]$$

Intuitivamente possiamo pensare all'angolo radiante come alla *lunghezza di un percorso* che effettua un punto che parte da *A* per giungere sul punto *P*.

Utilizzando la proporzione $180°: \alpha° = \pi: \alpha^r$ è possibile convertire gradi espressi in gradi in radianti e viceversa: vediamo come.

Esempio 1.
Trasformiamo in gradi la misura dell'angolo $\alpha^r = 2\ rad$.

Impostiamo la proporzione ottenendo $180°: \alpha° = \pi: 2$, da cui $\alpha° = \frac{180 \cdot 2}{\pi} \approx 114°$.

Esempio 2.
Trasformiamo i radianti l'angolo di *60°*.

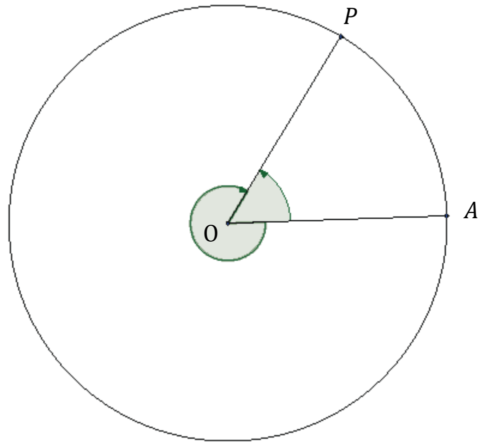
Impostando la proporzione otteniamo $180°: 60° = \pi: \alpha^r$, da cui $\alpha^r = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \approx 1{,}05°$.

Abbiamo dato quindi un'interpretazione *cinematica* della misurazione di un angolo, che si presta ad essere generalizzata.

In riferimento alla figura precedente, possiamo pensare che un punto che parte da *A* raggiunga *P* non percorrendo l'arco *minore*, ma quello *maggiore* : un percorso può essere affrontato in verso *orario* o in verso *antiorario*.

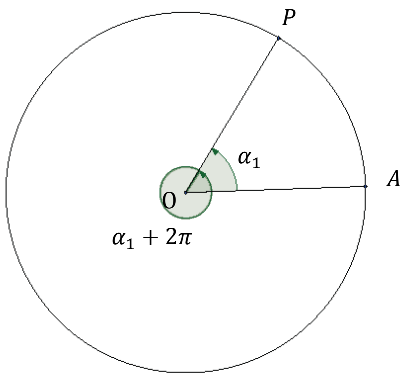
Per distinguere il verso di percorrenza si attribuisce un segno al percorso: positivo se il percorso è antiorario, negativo altrimenti.

Ad esempio



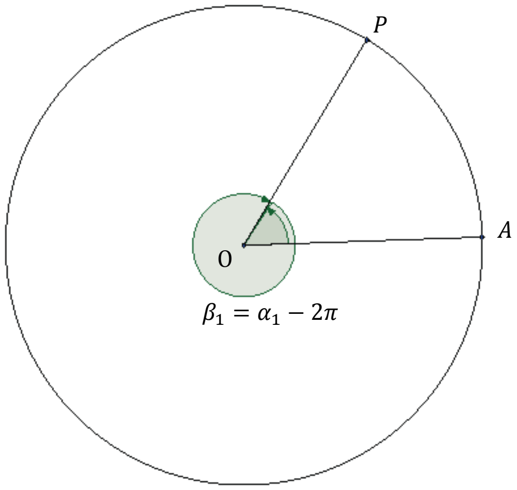
Attualmente dunque, per raggiungere il punto P partendo da A abbiamo a disposizione *due* percorsi, ovvero due angoli radianti, compresi nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$.

Interpretando cinematicamente l'angolo radiante è possibile un'ulteriore generalizzazione:



In riferimento alla figura precedente osserviamo che un punto, partendo da *A,* individua il punto P effettuando un percorso in senso antiorario di lunghezza α_1; ma questo non è l'unico percorso positivo che individua il punto P: anche l'angolo $\alpha_2 = \alpha_1 + 2\pi$, così come $\alpha_3 = \alpha_1 + 2 \cdot 2\pi$ e $\alpha_4 = \alpha_1 + 3 \cdot 2\pi$.

Allo stesso modo, individuano il punto P gli angoli (*i percorsi*)



$\beta_1 = \alpha_1 - 2\pi$, $\beta_2 = \alpha_1 - 2 \cdot 2\pi$, $\beta_3 = \alpha_1 - 3 \cdot 2\pi$, e così via.

Tutti i percorsi che individuano il punto P a partire da A sono perciò esprimibili nella forma

$$\alpha = \alpha_1 + k \cdot 2\pi$$

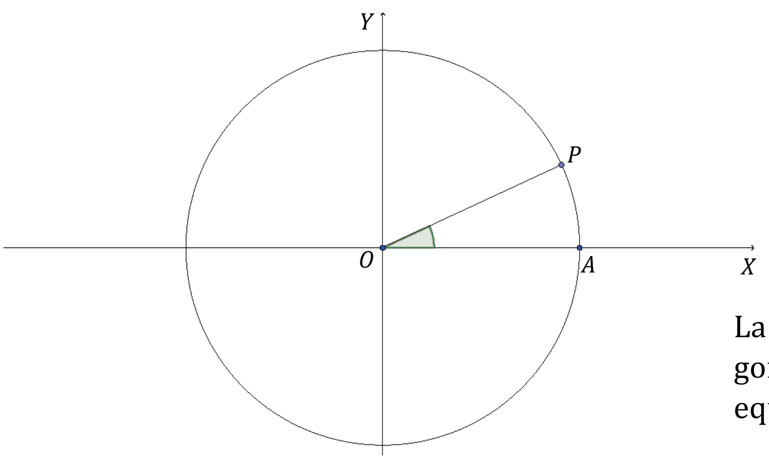
dove k è un generico numero intero e α_1 un fissato percorso che individua P (nell'esempio precedente è il più piccolo percorso positivo).

Abbiamo in questo modo associato a ogni numero reale un *percorso* sulla circonferenza unitaria, che chiameremo angolo radiante (o, più brevemente, angolo).

Osserviamo esplicitamente che ad ogni angolo in senso euclideo sono associati infiniti angoli radianti (infiniti percorsi positivi e infiniti percorsi negativi).

6.2 Definizione e proprietà di seno e coseno

Fissiamo nel piano euclideo un riferimento cartesiano e consideriamo la circonferenza centrata nell'origine di raggio unitario, che chiameremo *circonferenza goniometrica.*



La circonferenza goniometrica ha equazione

$$\mathcal{C}: X^2 + Y^2 = 1$$

Sia ora α un generico numero reale, che possiamo pensare come un angolo radiante; a partire da A, dunque, rimane univocamente determinato un punto $P(\alpha)$ sulla circonferenza goniometrica e di conseguenza un angolo $A\hat{O}P$.

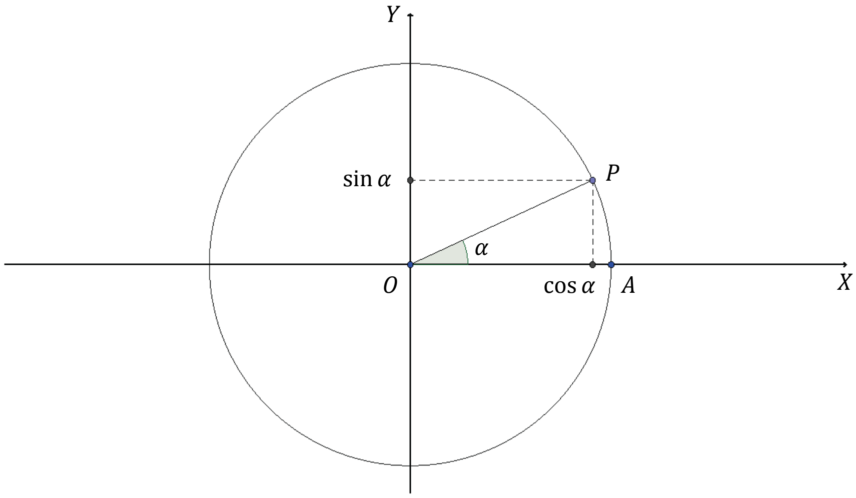
Posto $P(\alpha) = (x_\alpha, y_\alpha)$

- chiamiamo *coseno di* α*,* e lo indicheremo con $\cos\alpha$, l'ascissa del punto P ovvero

$$\cos\alpha = x_\alpha$$

- chiamiamo *seno di* α*,* e lo indicheremo con $\sin\alpha$, l'ordinata del punto P ovvero

$$\sin\alpha = y_\alpha$$



Dunque

$$P(\alpha) = (\cos\alpha\,, \sin\alpha)$$

Riassumendo:

dato un qualunque numero reale α, rimane individuato sulla circonferenza goniometrica un punto $P(\alpha)$: chiamiamo coseno di α l'ascissa di P e seno di α l'ordinata di P.

Il coseno e il seno di un angolo sono *le coordinate* del punto sulla circonferenza goniometrica individuato da quell'angolo.

In simboli

$$\mathbb{R} \ni \alpha \to P(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha) \in \mathcal{C}$$

Il coseno e il seno, essendo coordinate di un punto sulla circonferenza unitaria, sono necessariamente numeri compresi tra -1 e 1.

Perciò

- $\cos: \mathbb{R} \to [-1,1], \quad \alpha \to \cos\alpha$
- $\sin: \mathbb{R} \to [-1,1], \quad \alpha \to \sin\alpha$

Le funzioni coseno e seno sono funzioni limitate

Ricordiamo che una funzione si dice *limitata* se l'insieme delle immagini è limitato superiormente e inferiormente, ovvero se esistono due numeri reali m e M tali che

$$m \leq f(x) \leq M$$

per ogni x nel dominio della funzione.

Poiché *seno* e *coseno* sono coordinate di un punto della circonferenza unitarie *sono funzioni limitate* : in particolare

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

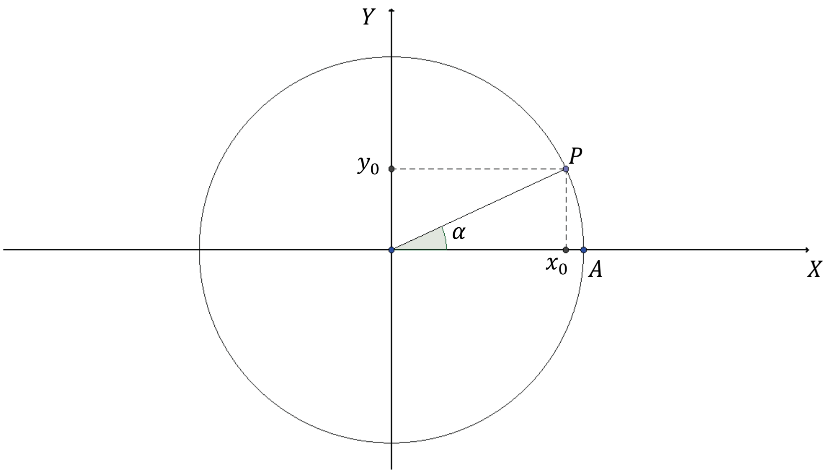
$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

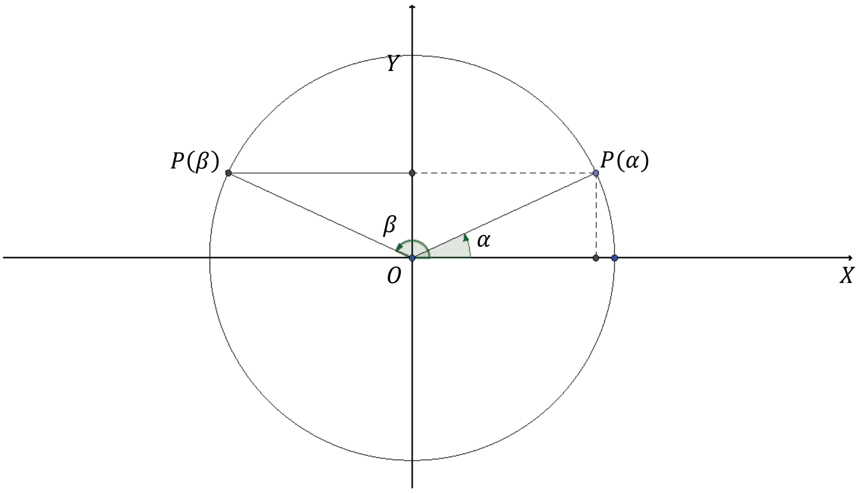
Le funzioni coseno e seno sono suriettive e non iniettive

Le funzioni $\cos: \mathbb{R} \to [-1,1]$ e $\sin: \mathbb{R} \to [-1,1]$ sono suriettive: è immediato riconoscere che

- per ogni $y_0 \in [-1,1]$ esiste un $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $y_0 = \sin\alpha$
- per ogni $x_0 \in [-1,1]$ esiste un $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $x_0 = \cos\alpha$



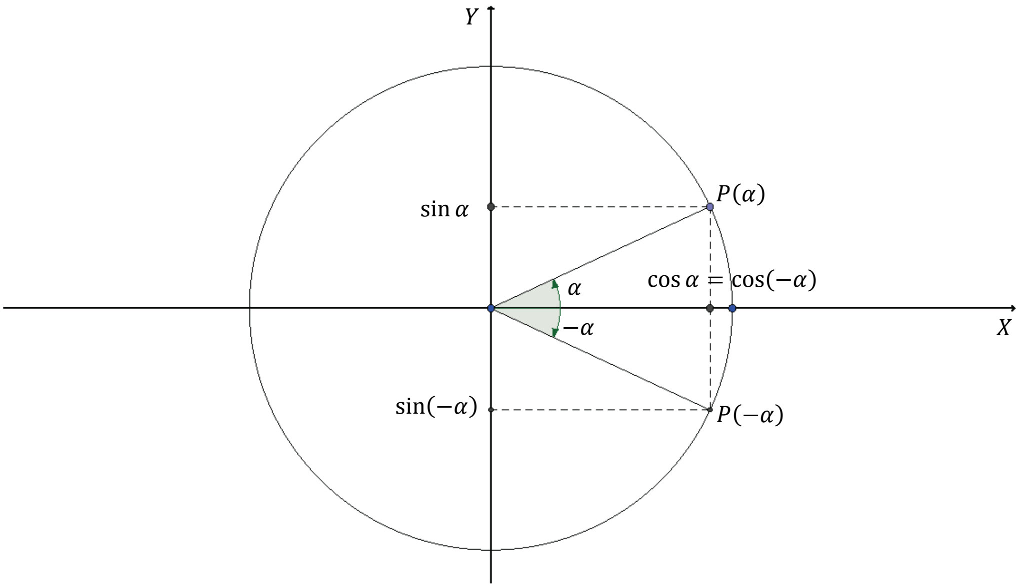
Coseno e seno non sono funzioni iniettive, ovvero esistono elementi del dominio distinti con la stessa immagine. Ad esempio nella figura seguente α e β sono angoli distinti con lo stesso seno.



Simmetria nelle funzioni coseno e seno

Un angolo α individua, come abbiamo visto, un punto $P(\alpha)$ sulla circonferenza goniometrica.

L'angolo opposto ad α, $-\alpha$, individua il punto $P(-\alpha)$ simmetrico di $P(\alpha)$ rispetto all'asse delle ascisse.



$P(\alpha)$ e $P(-\alpha)$ hanno la stessa ascissa e le ordinate opposte, dunque

- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

Perciò

- il *coseno è una funzione pari*
- *il seno è una funzione dispari*

Ad esempio $\cos(x - y) = \cos(y - x)$, mentre $\sin(x - y) = -\sin(y - x)$.

Periodicità

Abbiamo visto in precedenza che se $x \in \mathbb{R}$ allora il numero $x + 2\pi$ individua lo stesso punto sulla circonferenza goniometrica, ovvero

$$P(x + 2\pi) = P(x) \text{ per ogni x} \in \mathbb{R}$$

di conseguenza

- $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
- $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

Osserviamo esplicitamente che 2π è il più piccolo numero positivo per cui vale questa proprietà.

Diciamo perciò che *le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo* $T = 2\pi$*.*

In virtù della periodicità, è sufficiente sapere come il seno e il coseno trasformano tutti i numeri in un intervallo lungo 2π (ad esempio $[0, 2\pi]$) per sapere come trasformano ogni numero reale.

Prima relazione fondamentale

Ogni numero reale x abbiamo visto che individua un punto sulla circonferenza goniometrica $P(x) = (\cos x, \sin x)$. Poiché la circonferenza goniometrica ha equazione $X^2 + Y^2 = 1$, sostituendo si ottiene

$$\boxed{(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1}$$

Questa relazione è detta *prima relazione fondamentale* e vale per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Per comodità nella scrittura si usa scrivere $\cos^2 x$ al posto di $(\cos x)^2$; in modo analogo $\sin^2 x = (\sin x)^2$.

Questa relazione è molto importante perché consente di ricavare $\cos^2 x$ conoscendo $\sin^2 x$ e, viceversa, consente di ricavare $\sin^2 x$ conoscendo $\cos^2 x$.

Dalla prima relazione si ricava immediatamente

- $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
- $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

Dalle relazioni precedenti, applicando la radice ad entrambi i membri (… perché è un'operazione lecita?...) si ottiene

- $|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x}$
- $|\sin x| = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

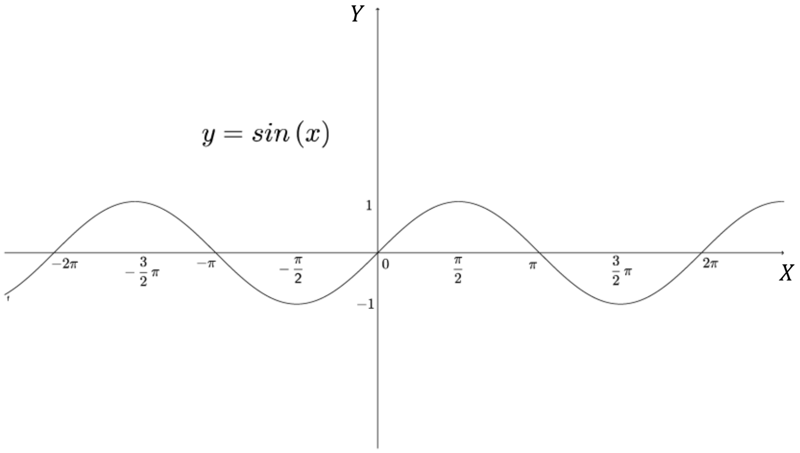
Attenzione!
Conoscere il valore di un seno non consente, in generale, di determinare il valore del corrispondente coseno (e viceversa).

Ad esempio, sapendo che $\sin x = \frac{3}{5}$ dalla prima relazione fondamentale otteniamo $\cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, da cui $|\cos x| = \frac{4}{5}$.

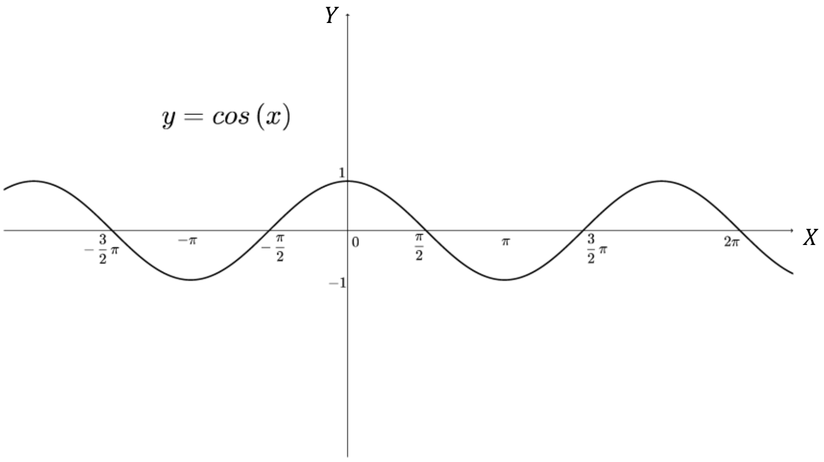
Da qui possiamo concludere, a seconda che il coseno sia positivo o negativo, che $\cos x = \frac{4}{5}$ o che $\cos x = -\frac{4}{5}$.

Per stabilire il valore del coseno, in questo caso, dovremmo avere un'informazione in più: se sapessimo che $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, sapremmo che il punto $P(x)$ sulla circonferenza unitaria si trova nel secondo quadrante, e individua così un coseno negativo: potremmo dunque concludere che $\cos x = -\frac{4}{5}$.

Il grafico della funzione seno è



Il grafico della funzione coseno è



6.3 Archi associati

Se due angoli stanno tra loro in una relazione particolare (ad esempio se sono complementari, supplementari o differiscono per un angolo retto) anche i corrispondenti seni e coseni stanno fra loro in qualche relazione particolare.

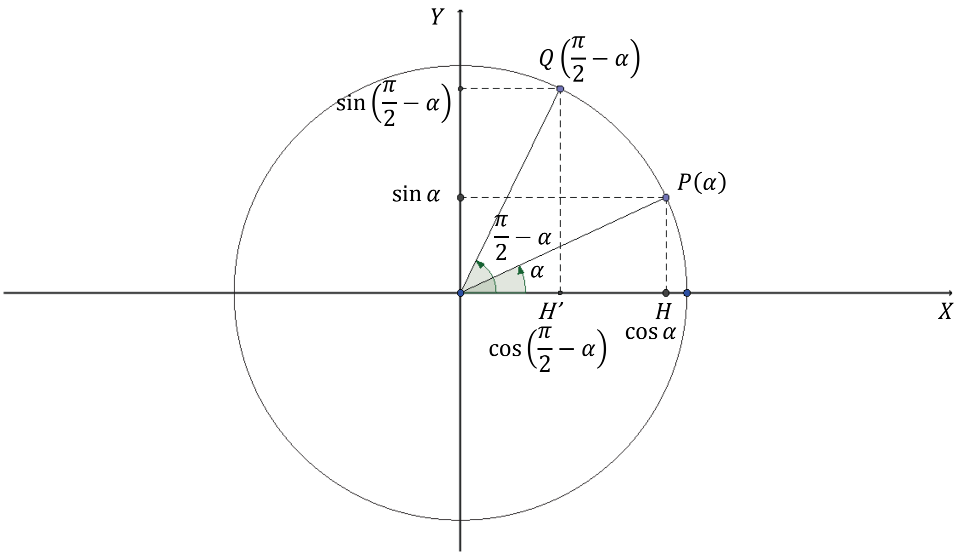
Vediamo alcuni casi.

Angoli complementari

Ricordiamo che due angoli sono complementari se la loro somma è un angolo retto.

Dunque, se α è un generico angolo, il suo complementare lo possiamo esprimere come $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

I due angoli individuano sulla circonferenza goniometrica due punti $P(\alpha)$ e $Q\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ e tracciamo dai punti P e Q le proiezioni sull'asse delle ascisse e chiamiamo H e H' i piedi delle perpendicolari.



I triangoli OPH e OQH' sono congruenti (… perché?...) dunque

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

In altri termini *il seno e il coseno di angoli complementari si scambiano fra loro*.

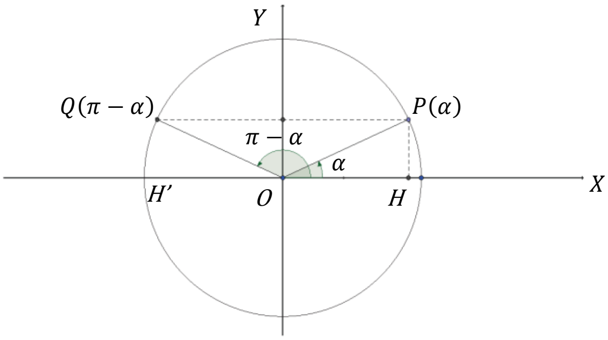
Ad esempio vale $\sin\frac{\pi}{12} = \cos\frac{5\pi}{12}$.

Angoli supplementari

Ricordiamo che due angoli si dicono *supplementari* se la loro somma è un angolo piatto.

Dato un generico angolo α il suo supplementare si esprime come $\pi - \alpha$.

Analogamente al caso precedente consideriamo i punti $P(\alpha)$ e $Q(\pi - \alpha)$ e i triangoli *OPH* e *OQH':*



I triangoli *OPH* e *OQH'* sono congruenti: ricordiamo comunque che seni e coseni sono *coordinate* di punti sulla circonferenza goniometrica.

I punti P e Q hanno la stessa ordinata, dunque

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$

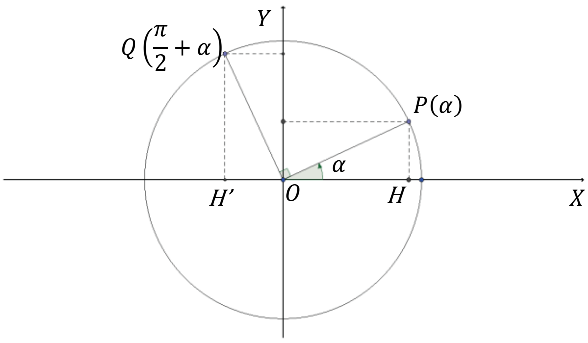
I segmenti *H'O* e *OH* sono congruenti, perciò le *ascisse* dei punti P e Q sono numeri opposti, dunque

- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

Angoli che differiscono per un angolo retto

Vediamo che relazione intercorre fra due angoli che differiscono per un angolo retto, ovvero due angoli del tipo α e $\frac{\pi}{2} + \alpha$.

Con considerazioni del tutto analoghe a quelle fatte in precedenza consideriamo i punti sulla circonferenza goniometrica $P(\alpha)$ e $Q\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ e i triangoli (congruenti) *OPH* e *OQH'.*



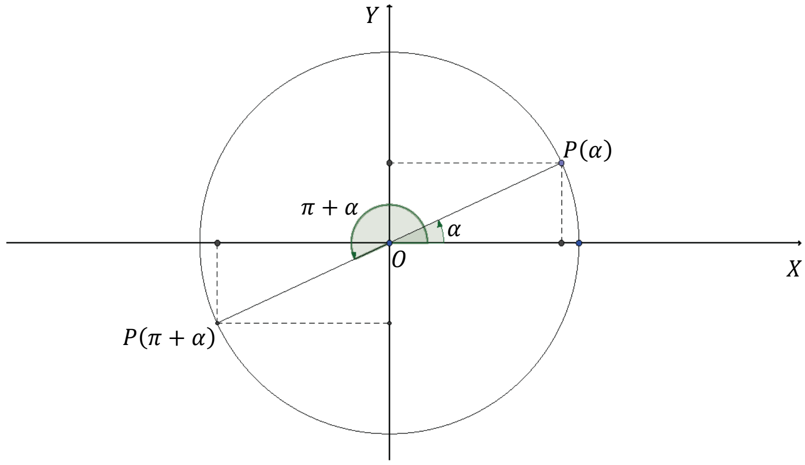
Ricordando che seni e coseni sono *coordinate* possiamo affermare che

- $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$

Infatti, l'ordinata di P e l'ascissa di Q sono numeri uguali in valore assoluto ma *opposti*.

Angoli che differiscono per un angolo piatto

Dati gli angoli α e $\pi+\alpha$ otteniamo la situazione seguente

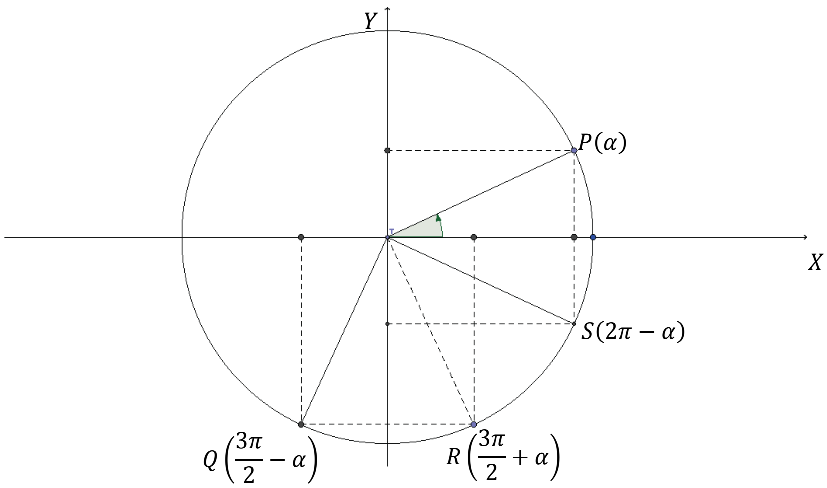


dunque

- $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$
- $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$

Altre relazioni particolari

Consideriamo gli angoli $\alpha, \frac{3\pi}{2}+\alpha, \frac{3\pi}{2}-\alpha, 2\pi-\alpha$.



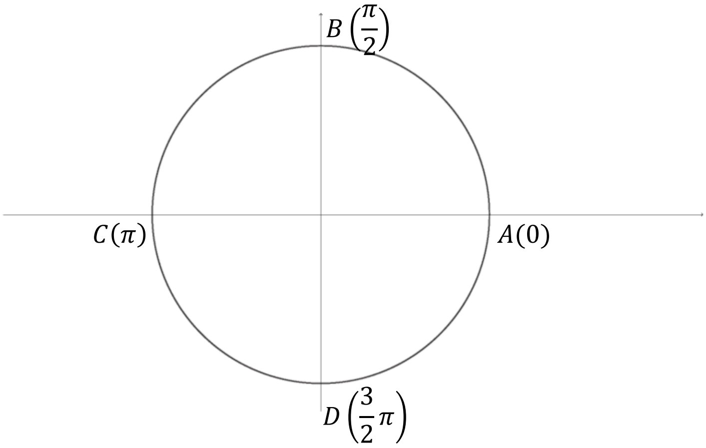
Sussistono le seguenti relazioni

- $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$
- $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$
- $\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$
- $\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$

6.4 Funzioni goniometriche di angoli particolari (0°, 30°, 60°, 45° e multipli)

All'angolo sessagesimale 0° corrisponde l'angolo $0\,rad$ e, di conseguenza, il punto sulla circonferenza goniometrica $A(1,0)$.

All'angolo retto, di misura $\frac{\pi}{2}\ rad$, corrisponde il punto $B(0,1)$; all'angolo piatto, di misura $\pi\ rad$, corrisponde il punto $C(-1,0)$; la misura in radianti dell'angolo di 270° è $\frac{3\pi}{2}$ e il punto $D(0,-1)$, mentre all'angolo giro (di misura $2\pi\ rad$) nuovamente il punto $A(1,0)$.

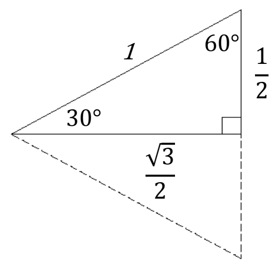


Dunque

- $\sin 0=0$
- $\cos 0=1$
- $\sin\frac{\pi}{2}=1$
- $\cos\frac{\pi}{2}=0$
- $\sin\pi=0$
- $\cos\pi=-1$
- $\sin\frac{3\pi}{2}=-1$
- $\cos\frac{3\pi}{2}=0$
- $\sin 2\pi=0$
- $\cos 2\pi=1$

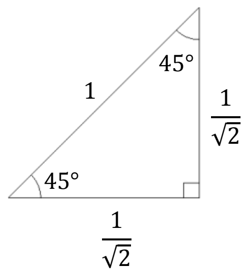
Consideriamo ora due triangoli rettangoli "speciali" con l'ipotenusa di misura unitaria: uno con angoli acuti di 30° e 60°, l'altro con gli angoli acuti di 45°.

Triangolo del primo tipo



Il triangolo è, evidentemente, la metà di un triangolo equilatero: il cateto minore misura dunque $\frac{1}{2}$ e, applicando il teorema di Pitagora, si trova che il cateto maggiore misura $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

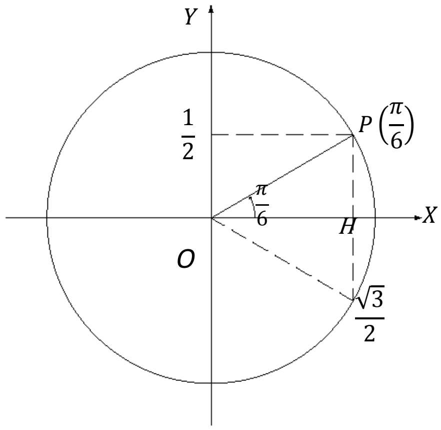
Triangolo del secondo tipo



Il triangolo è la metà di un quadrato di diagonale unitaria: i cateti (i lati del quadrato) misurano quindi $\frac{1}{\sqrt{2}}$ o, equivalentemente, $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Seno e coseno di 30°

Ad un angolo di 30° abbiamo visto che corrisponde l'angolo radiante $\frac{\pi}{6}$, che individua sulla circonferenza goniometrica il punto $P\left(\frac{\pi}{6}\right)$.



Il triangolo OPH è del primo tipo, essendo l'ipotenusa il raggio della circonferenza goniometrica.

Dunque

- $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
- $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

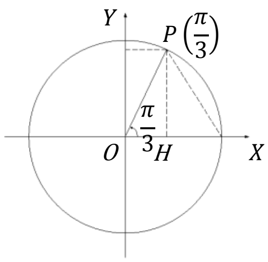
Angoli di 60°

Ad un angolo di 60° corrisponde un angolo radiante di $\frac{\pi}{3}$.

Essendo 60° il complementare di 30°, ed avendo visto che gli angoli complementari si scambiano fra loro il seno e il coseno, possiamo direttamente concludere che

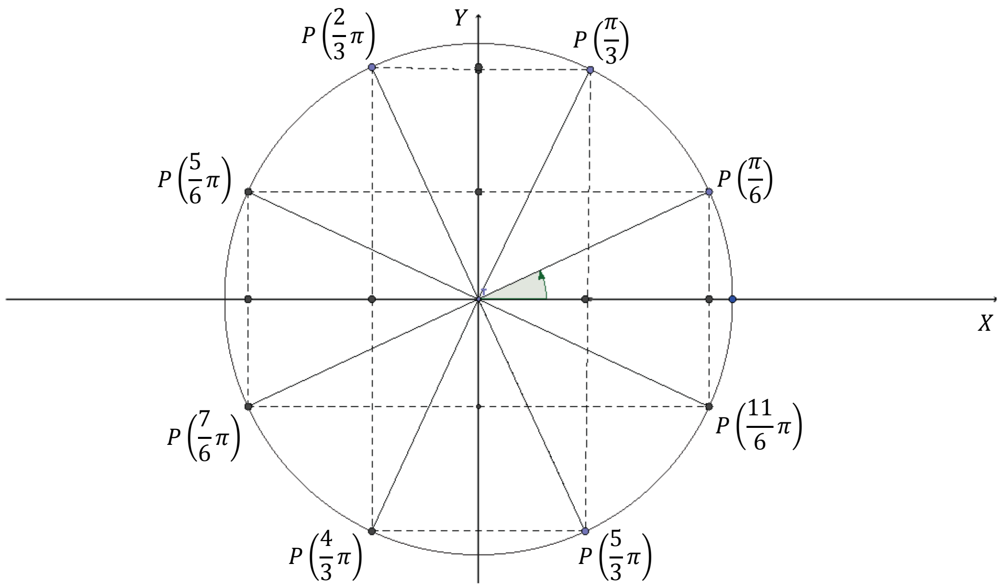
- $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

Si può, tuttavia, procedere direttamente osservando che OPH è un angolo del primo tipo (perché?...), dove P è individuato dall'angolo $\frac{\pi}{3}$.



Angoli multipli di 30° (e di 60°)

Possiamo notare che tutti gli angoli multipli di $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{3}$ individuano triangoli del primo tipo:



tenendo conto che seni e coseni sono *coordinate* (e possono, dunque, essere valori positivi e negativi) possiamo concludere che

- $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}$
- $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$
- $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
- $\cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
- $\sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$
- $\sin\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
- $\cos\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

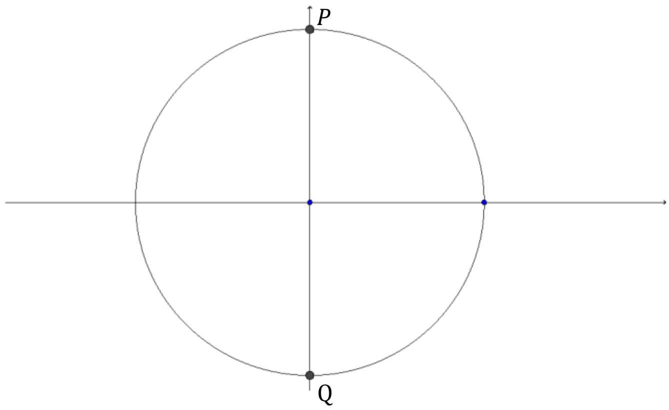
6.5 Definizione e proprietà di tangente e cotangente

Definizione.
Sia x un numero reale; chiamiamo *tangente di* x il numero

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

La tangente non è una quantità definita per ogni numero reale: l'espressione $\frac{\sin x}{\cos x}$ ha senso solo se $\cos x \neq 0$.

Questo accade per tutti gli angoli che non individuino i punti P e Q

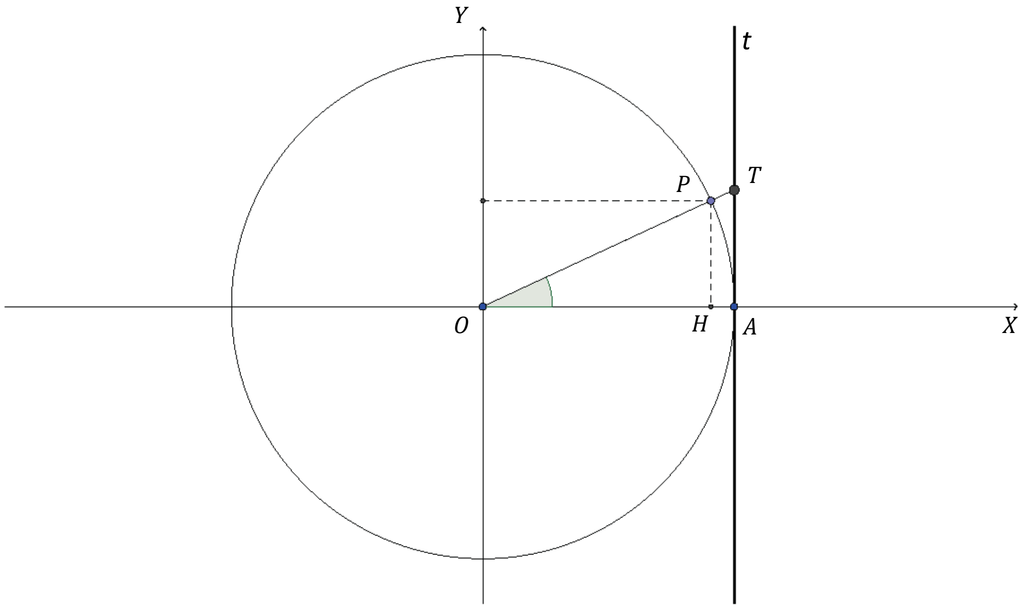


ovvero per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Rimane così definita la funzione

$$tan: \mathbb{R} - \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \to \mathbb{R}, \quad x \to y = \tan x$$

La tangente ha un'utile interpretazione geometrica: consideriamo la seguente figura



Dalla similitudine dei triangoli OPH e OTA segue la proporzione

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{PH}}{\overline{OH}}$$

da cui, ricordando che $\overline{OA} = 1$ perché raggio della circonferenza goniometrica e osservando che $\overline{PH} = \sin x$, $\overline{OH} = \cos x$ viene che

$$\overline{AT} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

Perciò il *valore della tangente si può leggere sulla retta t.*

Otteniamo valori positivi se l'angolo individua punti sulla circonferenza goniometrica nel primo e nel terzo quadrante e valori negativi se i punti individuati sono nel secondo o nel quarto quadrante.

La misura del segmento $\overline{AP}$ indica, in valore assoluto, il valore della tangente.

Definizione.
Sia x un numero reale; chiamiamo *cotangente di* x il numero

$$\cot(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

La cotangente è definita per tutti gli angoli che non annullano il seno, dunque per gli $x \neq k\pi$.

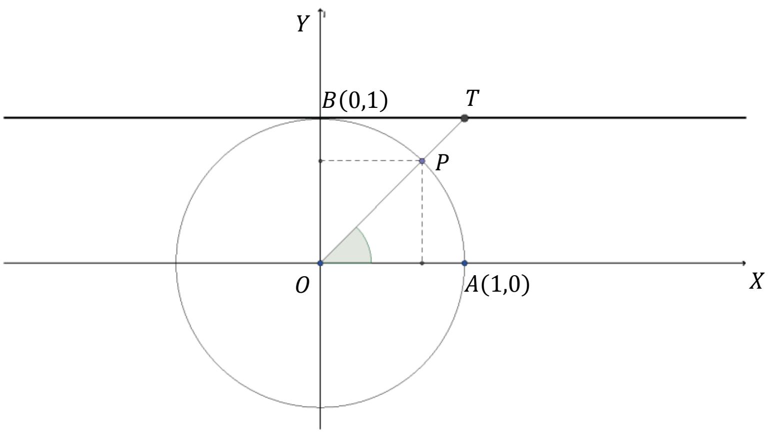
Rimane così definita la funzione

$$cot: \mathbb{R} - \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \to \mathbb{R}, \quad x \to y = \cot x$$

Osserviamo esplicitamente che

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan x}$$

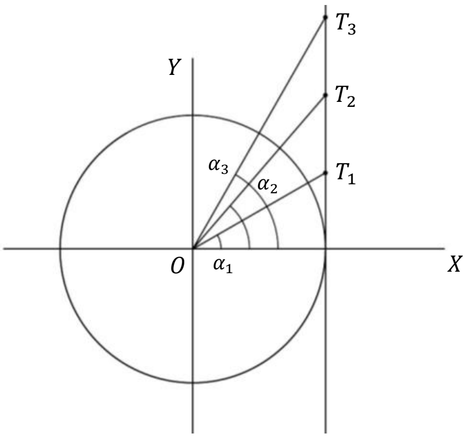
Come per la tangente, anche la cotangente si può interpretare geometricamente; il suo valore si legge sulla retta di equazione $y = 1$ ed è l'ascissa del punto T individuato dall'intersezione tra la retta $y = 1$ e la retta *OP,* dove P è il punto sulla circonferenza goniometrica individuato dall'angolo x.



Vediamo ora alcune proprietà della tangente e della cotangente.

La tangente e la cotangente non sono funzioni limitate

La tangente, diversamente dal seno e dal coseno, *non è una funzione limitata*. Questo fatto si può vedere facilmente per via grafica:



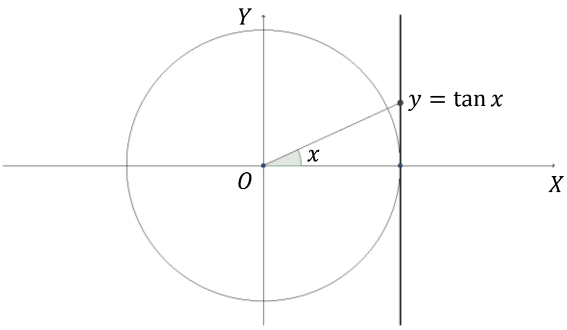
Possiamo notare che al tendere degli angoli α_1, α_2, α_3... a $\frac{\pi}{2}$ i valori delle corrispondenti tangenti aumentano arbitrariamente, assumendo valori grandi a piacere.

In modo analogo ci si può convincere che anche la cotangente non è limitata.

La tangente e la cotangente sono funzioni suriettive ma non iniettive

La funzione $tan: \mathbb{R} - \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \to \mathbb{R}$ è suriettiva: utilizzando l'interpretazione grafica ci si convince facilmente che

per ogni $y \in \mathbb{R}$ esiste $x \in \mathbb{R} - \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ tale che $y = \tan x$.



La tangente, inoltre, non è iniettiva: esistono angoli distinti che individuano la stessa tangente.

Infatti, per ogni $x \in \mathbb{R} - \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ si ha, ad esempio, $\tan x = \tan(x + 2\pi)$.

Analogamente si può vedere che anche la cotangente è $cot: \mathbb{R} - \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \to \mathbb{R}$, $x \to y = \cot x$ è una funzione suriettiva e non iniettiva.

Simmetria della tangente e della cotangente

La funzione tangente è una funzione *dispari*, ovvero per ogni x in cui è definita vale

$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

La dimostrazione è immediata, ricordando che il seno è una funzione dispari e il coseno pari:

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

Similmente si vede che la cotangente è una funzione dispari: per ogni valore di x in cui è definita vale infatti

$$\cot(-x) = -\cot(x)$$

Periodicità

La tangente e la cotangente sono necessariamente periodiche, perché lo sono il seno e il coseno; non hanno, però, lo stesso periodo $T = 2\pi$.

Due angoli che differiscono di π hanno la stessa tangente e cotangente; inoltre, π è il più piccolo numero positivo per cui accade.

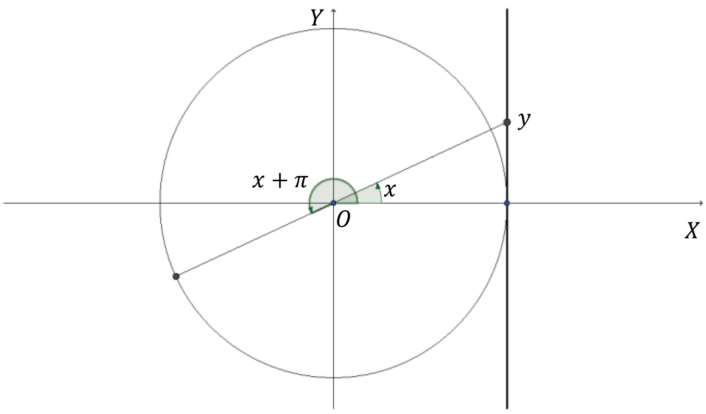
Infatti

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

e, analogamente

$$\cot(x+\pi) = \cot(x)$$

Questo risultato, e il fatto che π è il numero positivo minore per cui è valida l'uguaglianza, si può vedere anche utilizzando l'interpretazione grafica della tangente

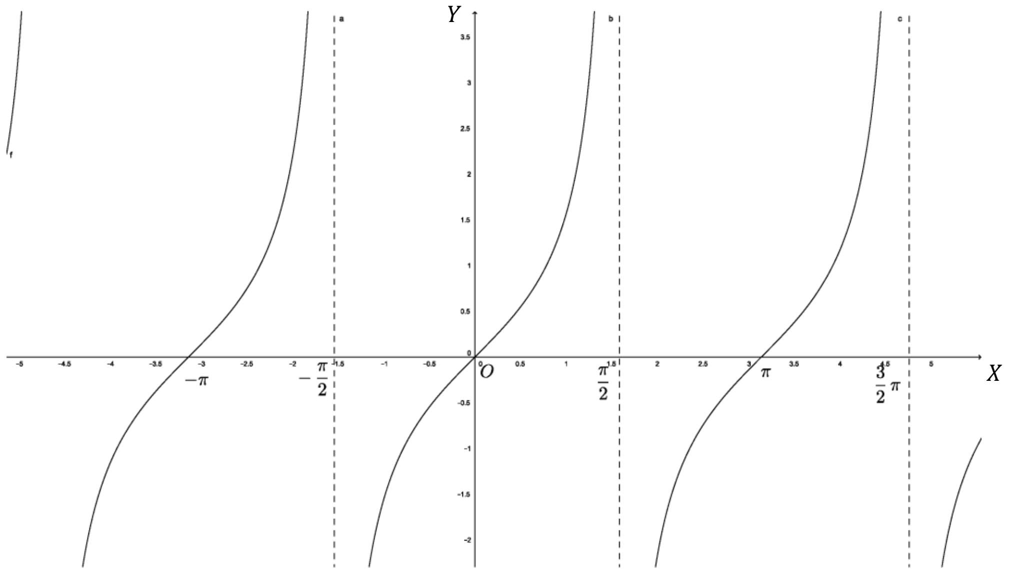


Tangente, cotangente e archi associati

Sfruttando la definizione o l'interpretazione grafica si possono provare le seguenti uguaglianze:

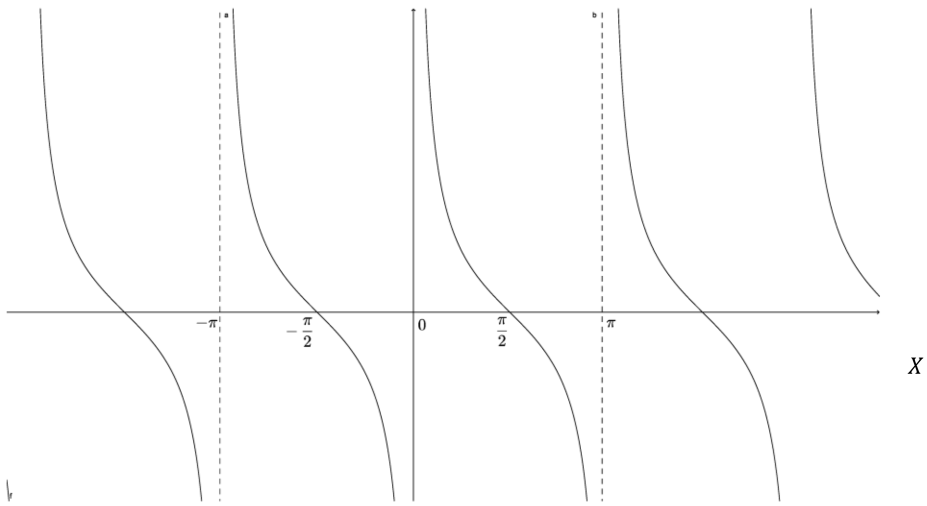
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x} = \cot x$
- $\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$
- $\tan(\pi - x) = -\tan x$
- $\cot(\pi - x) = -\cot x$
- $\tan(x + \pi) = \tan x$
- $\cot(x + \pi) = \cot x$
- $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan x} = -\cot x$
- $\cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan x$
- $\tan\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\cot(x)}$
- $\cot\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cot x$
- $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cot x$
- $\cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\cot x}$
- $\tan(2\pi - x) = -\tan x$
- $\cot(2\pi - x) = -\frac{1}{\tan x}$

Il grafico della tangente è



Il grafico della cotangente è

Y



6.6 Funzioni goniometriche inverse

Sinora abbiamo definito le funzioni goniometriche seno, coseno, tangente e cotangente: ci proponiamo ora di vedere se – e sotto quali condizioni – esistono le funzioni inverse.

Cominciamo a considerare il seno: essa è una funzione

$$\sin: \mathbb{R} \to [-1,1]$$

che trasforma un arbitrario numero reale (che rappresenta un *angolo radiante*) in un numero compreso tra *-1* e *1*, ordinata del punto sulla circonferenza goniometrica individuato dall'angolo.

La funzione inversa che cerchiamo dovrà trasformare dunque un numero compreso tra *-1* e *1* – un ordinata di un punto sulla circonferenza goniometrica – in un *angolo* il cui seno sia il numero di partenza.

Sappiamo che affinché una trasformazione inversa sia una funzione, è necessario e sufficiente che la funzione diretta sia *iniettiva* e *suriettiva*.

Abbiamo visto che il seno è una funzione $\sin: \mathbb{R} \to [-1,1]$ suriettiva; non è, però, iniettiva.

Due angoli distinti che individuano i punti P e Q in figura hanno lo stesso seno ovvero $\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha)$.

Per ovviare a questo inconveniente possiamo restringere il dominio: a tutti gli intervalli che individuano punti solo nella "semicirconferenza destra": i suddetti intervalli sono del tipo $I_K = \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$.

$$\underbrace{-\frac{5}{2}\pi \qquad\qquad -\frac{3}{2}\pi}_{I_{-1}} \qquad\qquad \underbrace{-\frac{\pi}{2} \qquad 0 \qquad \frac{\pi}{2}}_{I_0} \qquad\qquad \underbrace{\frac{3}{2}\pi \qquad\qquad \frac{5}{2}\pi}_{I_1}$$

Anche in questa restrizione la funzione non è iniettiva: in ognuno di questi intervalli infatti esistono angoli che individuano lo stesso punto P (percorrendo più giri completi sulla circonferenza goniometrica).

Basterà allora sceglierne uno: convenzionalmente si prende $I_0 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Finalmente, possiamo affermare che la funzione

$$\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$

è suriettiva e iniettiva; in questo caso esiste perciò la funzione inversa, detta *arcoseno*

$$\arcsin: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad y = \arcsin x$$

Grazie a queste considerazioni è giustificata la seguente

Definizione.

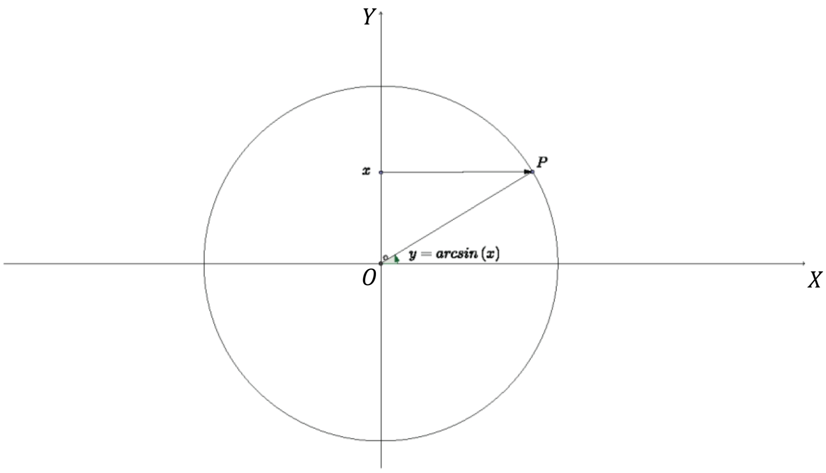
Sia x un numero reale, $-1 \leq x \leq 1$. Si chiama *arcoseno di x,* e si indica con

$$\arcsin x$$

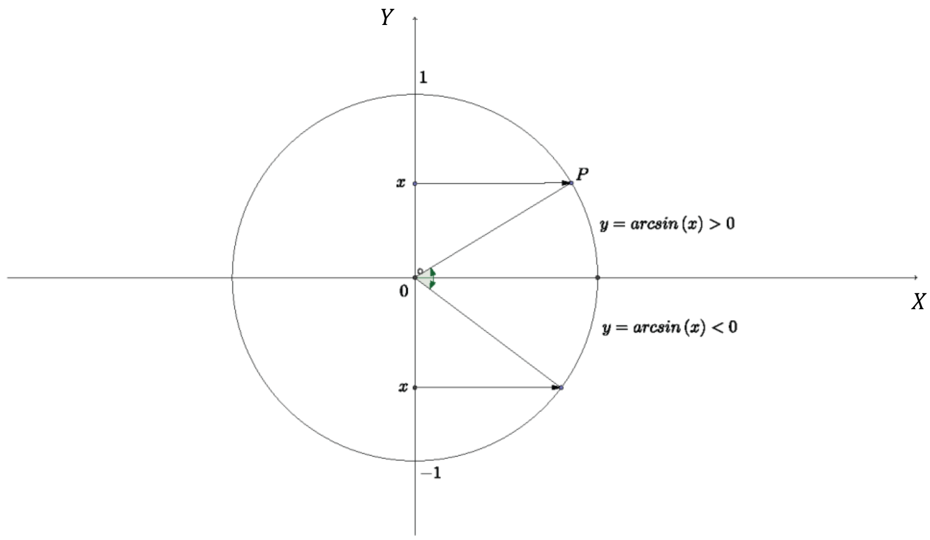
l'unico numero reale (che rappresenta un angolo radiante) compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ il cui seno vale x.

Dunque

- $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$, $\ -1 \leq x \leq 1$.
- $\sin(\arcsin x) = x$, $\ -1 \leq x \leq 1$.
- $\arcsin(\sin x) = x$, $\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.



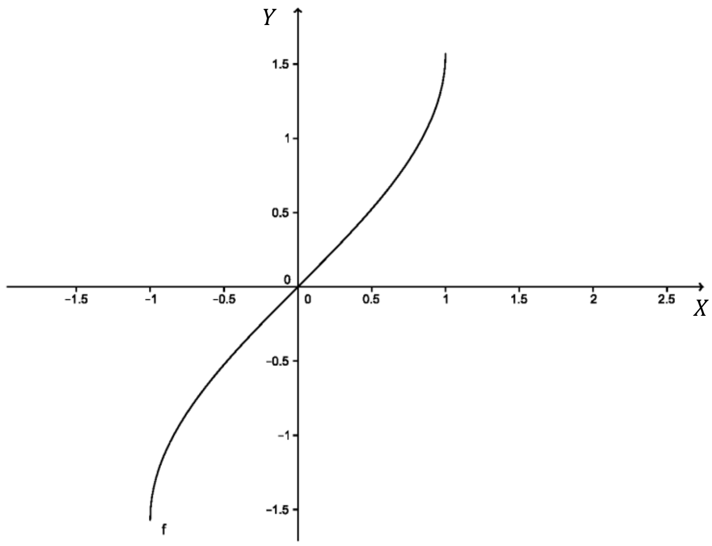
L'arcoseno $y = \arcsin x$ rappresenta la lunghezza (con segno) dell'arco di circonferenza goniometrica: ha valore positivo se $0 < x \leq 1$, mentre ha valore negativo se $-1 < x < 0$.



L’arcoseno è una funzione *dispari*: per ogni $x, -1 \leq x \leq 1$ vale infatti

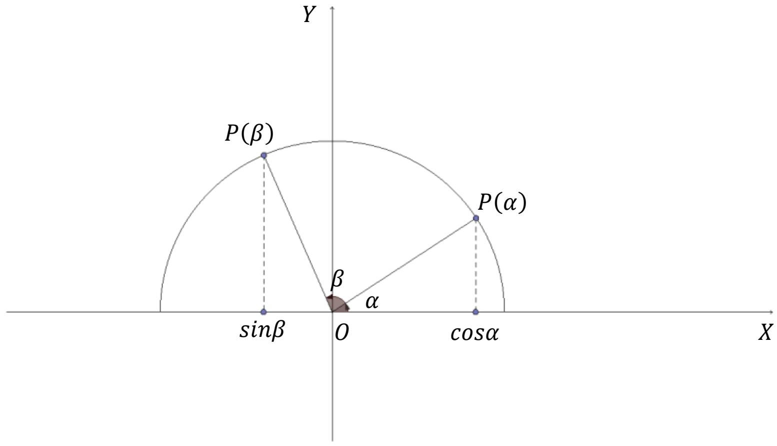
$$\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$$

Il grafico della funzione arcoseno è



In modo analogo si costruiscono le funzioni inverse del coseno, della tangente e della cotangente.

Abbiamo visto che la funzione $\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$ non è iniettiva su $\mathbb{R}$: lo diventa se restringiamo il dominio all’intervallo $[0, \pi]$, ovvero se consideriamo solo i più piccoli percorsi positivi che individuano punti della semicirconferenza superiore.



A questo punto la funzione $\cos: [0, \pi] \to [-1,1]$ è iniettiva e suriettiva: rimane definita la funzione inversa, detta *arco coseno*.

Più nel dettaglio: diamo la seguente

Definizione.
Sia x un numero reale, $0 < x \leq 1$. Si chiama *arco coseno di* x, e si indica con

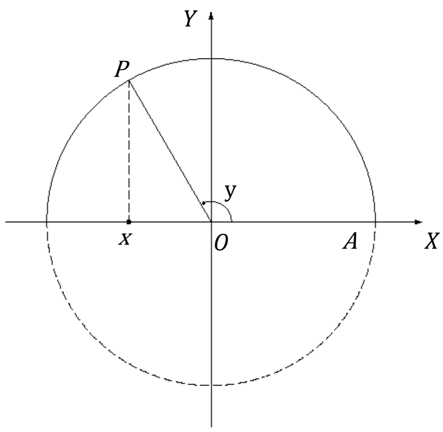
$$\arccos x$$

il numero reale compreso tra 0 e π il cui coseno vale x.

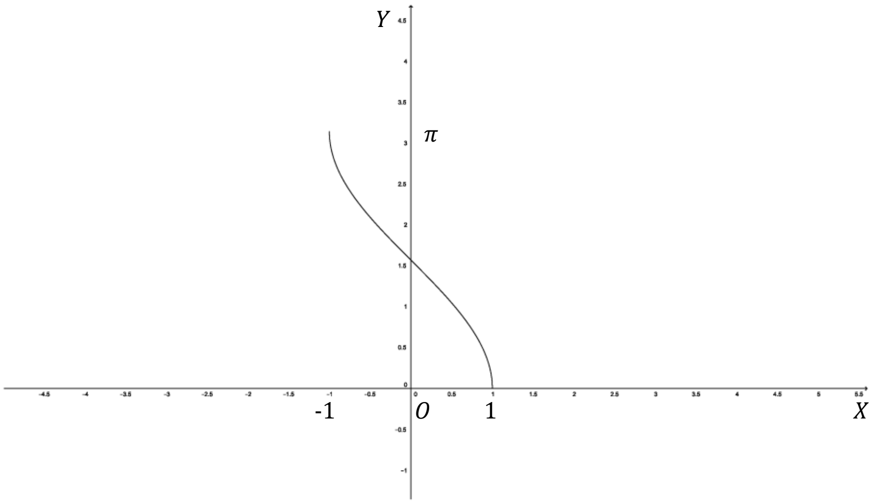
Dunque

- $0 \leq \arccos x \leq \pi$, $-1 \leq x \leq 1$.
- $\arccos(\cos x) = x$, $0 \leq x \leq \pi$.

Il numero $\mathrm{y} = \arccos x$ rappresenta la lunghezza dell'arco $\widehat{AP}$ descritto nella figura seguente



Il grafico della funzione arco coseno è



Considerazioni simili portano alla definizione della funzione inversa della tangente e della cotangente.

Osserviamo che la tangente $tan: \mathbb{R} - \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \to \mathbb{R}$ non è iniettiva nel suo dominio naturale; lo diventa restringendo il dominio all'insieme $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

La funzione $tan: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ risulta perciò invertibile; la funzione inversa

$$(tan)^{-1}: \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

prende il nome di *arcotangente.*

Abbiamo quindi la seguente

Definizione.
Sia $x \in \mathbb{R}$. Si chiama *arcotangente di x,* e si indica con

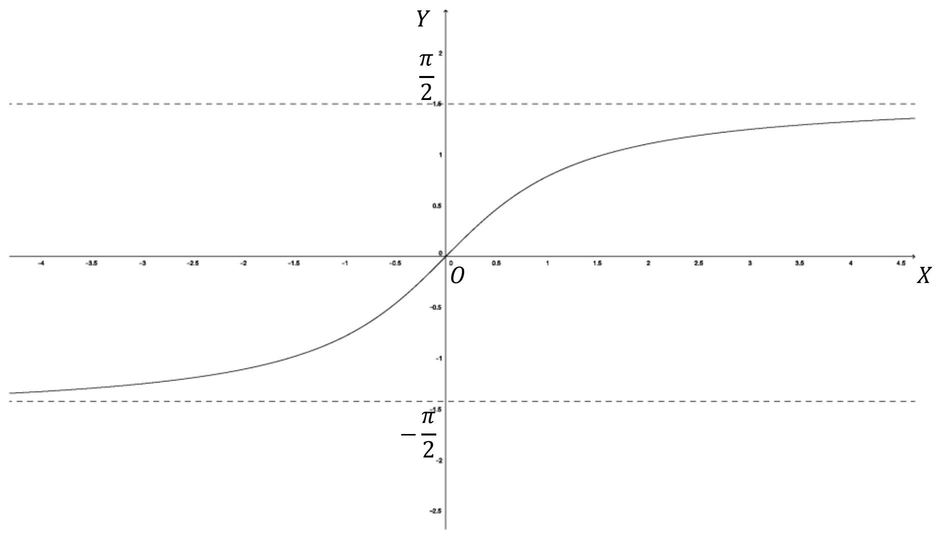
$$\operatorname{arctg} x$$

l'angolo (che esiste ed è unico) compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, la cui tangente sia x.

Dalla definizione segue direttamente che

- $\operatorname{arctg}(tgx) = x$ per ogni x tale che $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$;
- $\tan(\operatorname{arctg} x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Il grafico dell'arcotangente è



Allo stesso modo la cotangente non è iniettiva nel suo dominio naturale; lo diventa valutandola su una restrizione. La funzione $cot:]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ è invertibile; la funzione inversa

$$arccot: \mathbb{R} \rightarrow]0, \pi[$$

si chiama arcotangente.

Definizione.

Sia $x \in \mathbb{R}$. Si chiama *arco cotangente di x,* e si indica con

$$\operatorname{arccot} x$$

l'angolo (che esiste ed è unico) compreso tra 0 e π, la cui cotangente sia x.

Valgono le seguenti uguaglianze:

- $\operatorname{arccot}(cotx) = x$ per ogni x tale che $0 < x < \pi$;
- $\cot(\operatorname{arccot} x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

5.7 Le funzioni $y = \arcsin(\sin x)$*,* $y = \sin(\arcsin x)$

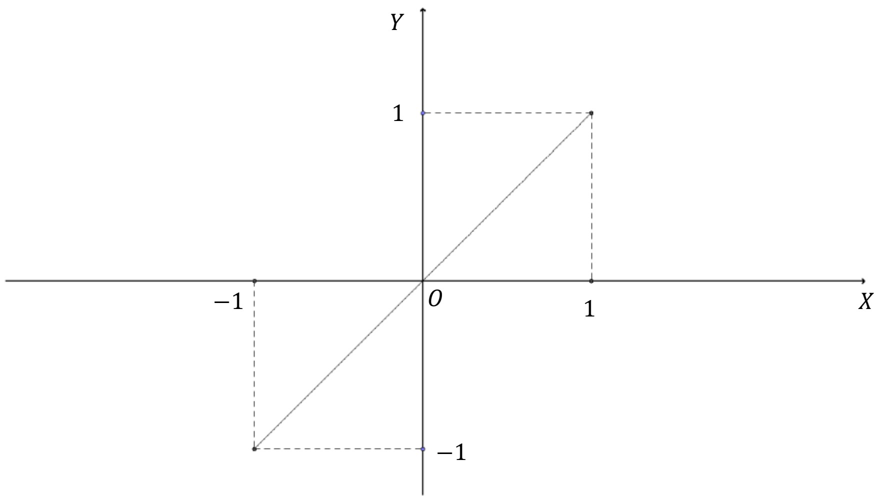
Studiamo l'andamento della funzione

$$y = \sin(\arcsin x)$$

Il dominio è l'insieme $D = [-1,1]$.

Inoltre, poiché $\sin(\arcsin x) = x$, $-1 \leq x \leq 1$ la funzione $y = \sin(\arcsin x)$ coincide nel suo dominio con la funzione identità $y = x$.

Il suo grafico risulta quindi



Studiamo ora l'andamento della funzione

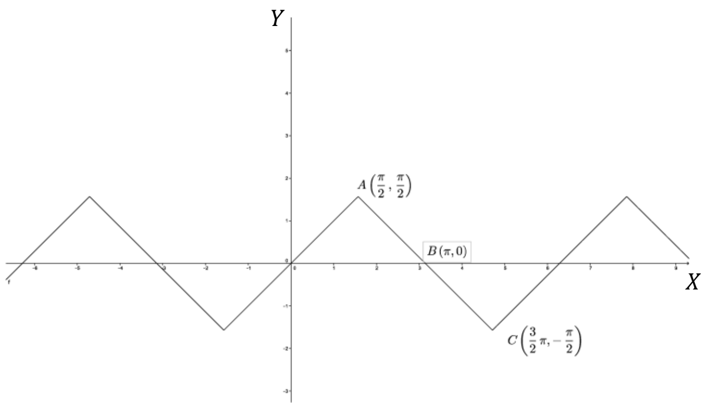
$$y = \arcsin(\sin x)$$

Il dominio è l'insieme $D = \mathbb{R}$.

Poiché il seno è periodico con periodo 2π, anche la funzione $y = \arcsin(\sin x)$ è periodica con periodo 2π; per determinare il grafico su tutto l'asse reale è perciò sufficiente determinarne l'andamento su un qualunque intervallo di lunghezza 2π: cercheremo il grafico nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$.

- Se $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ allora $\arcsin(\sin x) = x$; in questo caso dunque la funzione $y = \arcsin(\sin x)$ coincide con la funzione identica $y = x$.
- Se $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ allora $\arcsin(\sin x) = \pi - x$; in questo caso dunque la funzione $y = \arcsin(\sin x)$ coincide con la funzione lineare $y = \pi - x$.

Il grafico della funzione sull'intero asse reale si ottiene dal grafico ottenuto sull'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ traslandolo orizzontalmente verso destra e verso sinistra.



6.8 Esercizi svolti

Esercizio 1 .
Determiniamo l'area del settore circolare di raggio *2* e ampiezza $\frac{\pi}{12}$.

Detta A l'area del settore circolare e ρ l'ampiezza in radianti del settore, dalla proporzione $A: \pi r^2 = \rho: 2\pi$ otteniamo

$$A = \frac{\rho}{2} r^2$$

dunque $A = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}52$.

Esercizio 2.
Determiniamo l'area del settore circolare di raggio *3* e arco di misura *2*.

Dalla formula $A = \frac{\rho}{2} r^2$, ricordando che $\rho = \frac{l}{r}$ ne viene

$$A = \frac{l}{2} r$$

dunque $A = 3$.

Esercizio 3.
Trasformiamo 12° 54' 23'' in una misura in gradi decimali.

Vale $12°\, 54'\, 23'' = 12° + \left(\frac{54}{60}\right)^{\mathrm{o}} + \left(\frac{23}{3600}\right)^{\mathrm{o}} \approx 12{,}91°$.

Esercizio 4.
Trasformiamo 34,6° in una misura in gradi sessagesimali.

Vale $34{,}6° = 34° + 0{,}6° = 34° + 0{,}6 \cdot 60' = 34° + 36' = 34°\, 36'$

Esercizio 5.
Trasformiamo la misura in radianti $\frac{\pi}{12}$ in gradi.

Dalla proporzione $2\pi: 360 = \rho: \alpha$ segue $\alpha = \frac{180}{\pi} \rho$ dunque $\alpha = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\pi}{12} = 15°$.

Esercizio 6.
Troviamo il massimo e il minimo della funzione $f(x) = 2 \sin x + 1$.

Poiché il seno ha massimo *1* e minimo *-1*, f ha massimo $M = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ e minimo $m = -1$.

Esercizio 7.
Stabiliamo, senza l'ausilio della calcolatrice, il segno di $\sin(876)$.

Poiché $876: 2\pi \approx 139{,}4$ l'angolo radiante 876 equivale a 139 giri completi sulla circonferenza goniometrica più 0,4 di giro perciò $\sin(876) \approx \sin 0{,}4$.

Essendo $0{,}4 \approx 23°$, $\sin(876) > 0$.

Esercizio 8.
Determiniamo il dominio di $f(x) = \arcsin \frac{1}{x-1}$.

Il dominio della funzione arcoseno è $[-1{,}1]$; il dominio di f è pertanto la soluzione del sistema

$$\begin{cases} -1 \leq \dfrac{1}{x-1} \leq 1 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

che ha per soluzione $x < 0 \vee x > 2$.

Esercizio 9.
Calcoliamo $\cos\left[\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right]$.

Poiché $\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$ è il complementare di $\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$, e angoli complementari si scambiano il seno e il coseno ne viene che $\cos\left[\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right]=\sin\left[\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{1}{3}$.

Esercizio 10.
Calcoliamo $\cos\left[\arcsin\left(\frac{3}{4}\right)\right]$.

Poniamo $\alpha=\arcsin\left(\frac{3}{4}\right)$ e calcoliamo dunque $\cos\alpha$.

Dalla definizione di arcoseno viene che $\sin\alpha=\frac{3}{4}$ e che $-\frac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$. Possiamo quindi calcolare il coseno utilizzando la prima relazione fondamentale.

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{7}{4}$$

6.9 Esercizi proposti

1	Converti le misure dei seguenti angoli in forma decimale. a) 20° 50’ b)60° 30’ 20’’ c) 90° 25’ 78’’,4
2	Converti le misure dei seguenti angoli in forma sessagesimale. a) 22,5° b) 300,7° c) 54,76°
3	Converti le misure dei seguenti angoli in radianti. a) 22° 30’ b) 120° c) 78° d) 168° 30’
4	Converti le misure dei seguenti angoli in forma decimale o sessagesimale. a) 1 b) 2 c) 5 d) π e) $\frac{7\pi}{3}$
5	Determina la misura dell’arco di circonferenza di raggio *6*, con angolo corrispondente $\frac{\pi}{12}$.
6	Un settore circolare ha area *18* e il raggio della circonferenza misura *2;* determina la misura dell’angolo al centro e la lunghezza dell’arco.
7	Calcola l’area della figura curvilinea *ABC,* dove *A, B,* e *C* sono i vertici di un triangolo equilatero di lato unitario e *AB, BC, AC* sono archi di circonferenze centrate rispettivamente in *A, B* e *C.*
8	Rappresenta graficamente gli angoli ottusi α, β tali che $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ e $\cos\beta = \frac{2}{3}$.
9	Individua graficamente gli angoli α tali che $\cot\alpha = -2$.
10	Individua le restanti funzioni goniometriche di α. a) $\sin\alpha = \frac{1}{3},\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ b) $\cos\alpha = \frac{1}{3},\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ c) $\tan\alpha = -2\sqrt{2},\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$
11	Stabilisci se le seguenti funzioni sono pari o dispari. a) $f(x) = \sin(3x)$ b) $f(x) = \sin^2(5x)$ c) $f(x) = \sin^4(x) + \cos x$
12	Calcola il valore delle seguenti espressioni. a) $\mathrm{arctg}(-1)$ b) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ c) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
13	Calcola il valore delle seguenti espressioni. a) $\sin\left[\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right]$ b) $\tan\left[\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$ c) $\cos\left[\pi + \arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right]$ d) $\sin[\mathrm{arctg}(-2)]$

14	Calcola il massimo e il minimo delle seguenti funzioni. a) $f(x) = 2\sin x$ b) $f(x) = \sin(2x)$ c) $f(x) = 1 - 3\cos x$ d) $f(x) = 1 - 3\cos^2 x$ e) $f(x) = 3 - \frac{1}{2}\sin x\,,\ \ x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ f) $f(x) = 2\cos x,\ \ x \in \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$
15	Determina il dominio e gli zeri della funzione $y = \arccos\left(\frac{x-1}{x}\right)$.
16	Determina i valori di k affinché abbia senso la scrittura $\cos x = \frac{2-k}{k}$; stabilisci che valore può assumere k se $x \in \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$.

Diciamo che una funzione f è lineare se, per ogni x e y del suo dominio e per ogni numero reale k vale

- $f(x+y)=f(x)+f(y)$
- $f(kx)=kf(x)$

Le funzioni goniometriche *non sono lineari*: le due condizioni non sono, in generale, soddisfatte.

L'uguaglianza

$$\sin(x+y)=\sin(x)+\sin(y)$$

ad esempio, non è verificata per ogni scelta di x e y. Per rendercene conto, basta porre $x=y=\frac{\pi}{2}$.

Vediamo nel dettaglio come le funzioni goniometriche si comportano se all'argomento compaiono somme o differenze di angoli, o espressioni del tipo $\frac{x}{2}$ o $2x$.

6.10 Seno e coseno in funzione della tangente

Valgono le seguenti formule

$$\sin^2 x=\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}$$

Si ottengono dalla prima relazione fondamentale $(\cos x)^2+(\sin x)^2=1$.

Dividendo ambo i membri per $\cos^2 x$ otteniamo $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ da cui, passando ai reciproci $\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}$. L'espressione del seno si ottiene sostituendo l'espressione trovata nella prima relazione fondamentale (o, in alternativa, dalla prima relazione dividendo ambo i membri per $\sin^2 x$).

6.11 Formule di addizione e sottrazione

Si può dimostrare che

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

Questa formula viene detta *formula di sottrazione per il coseno.*

Questa uguaglianza ci consente di ottenere la seguente *formula di addizione per il coseno*

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

Per ricavarla, basta osservare che $\cos(x+y)=\cos\big(x-(-y)\big)$, applicare la formula di sottrazione e ricordare che $\cos(-y)=\cos y$ e $\sin(-y)=-\sin y$.

Per ricavare le *formule di addizione e sottrazione del seno* basta ricordare che gli angoli complementari si scambiano il seno e coseno; in particolare

$$\sin(x-y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x-y)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + y\right)$$

da cui, applicando l'addizione per il coseno e ricordando gli archi associati

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

In modo del tutto analogo (o osservando che $\sin(x+y) = \sin\big(x - (-y)\big)$) si ottiene

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

Per ricavare la *formula di addizione della tangente* si ricorre alla definizione e alle formule viste in precedenza:

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

da cui, dividendo numero e denominatore per $\cos x \cos y$ si ottiene

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Per ottenere la formula di sottrazione per la tangente osserviamo che

$$\tan(x-y) = \tan\big(x + (-y)\big)$$

Inoltre la tangente è una funzione dispari, ovvero per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale $\tan(-x) = -\tan(x)$, da cui

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

6.12 Formule di duplicazione

Ricaviamo la formula di duplicazione del coseno: poiché

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x$$

si ottiene

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Utilizzando la prima relazione fondamentale è possibile esprimere $\cos^2 x$ in funzione di $\sin^2 x$ e viceversa, ricavando due nuove identità

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

In definitiva $\cos(2x)$ si può esprimere in funzione sia di $\cos^2 x$ che di $\sin^2 x$, del solo $\cos^2 x$ o del solo $\sin^2 x$: utilizzeremo una delle tre identità a seconda della situazione in cui ci troviamo.

Poiché l'uguaglianza è vera per ogni x vale anche

$$\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos(x) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

Per ottenere la formula di duplicazione del seno si procede in modo analogo:

$$\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \sin x \cos x$$

dunque

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

Poiché l'uguaglianza è vera per ogni x vale anche

$$\sin x = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Per quanto riguarda la tangente:

$$\tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

e, dividendo numeratore e denominatore per $\cos^2 x$ (per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$) si ottiene infine

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Poiché l'uguaglianza è vera per ogni x vale anche

$$\tan(x) = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}$$

La dimostrazione della formula di duplicazione per la cotangente è lasciata per esercizio.

6.13 Formule di bisezione

Dalle identità dimostrate in precedenza

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

si ottiene

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

che sono identità già utili in sé; dopodiché, osservando che sono valide per ogni angolo x otteniamo le formule di *bisezione* per il seno e il coseno

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{2}$$

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos(x)}{2}$$

Le precedenti identità si possono anche esprimere

$$\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}$$

$$\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}}$$

Poiché l'uguaglianza è vera per ogni x vale anche

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

Queste identità, come vedremo, sono importanti perché consentono di *linearizzare* $\sin^2(x)$e $\cos^2(x)$, ovvero esprimerle in funzione di funzioni goniometriche di *primo* grado.

E' facile ricavare la formula di bisezione per la tangente:

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\frac{1 - \cos(x)}{2}}{\frac{1 + \cos(x)}{2}} = \frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}$$

ovvero

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}$$

o anche

$$\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}$$

Esistono altre due formule di bisezione per la tangente:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

Per dimostrare la prima formula procediamo come segue:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

da cui, moltiplicando numeratore e denominatore per $2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ si ottiene

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

e, poiché $\sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ e $2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1+\cos x$ segue

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

La seconda identità si dimostra in modo simile: è sufficiente moltiplicare numeratore e denominatore per $2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

E' immediato riconoscere che

$$\cot^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}$$

$$\cot\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos x}{\sin x}$$

$$\cot\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin x}{1-\cos x}$$

6.14 Formule parametriche

Le formule parametriche sono

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

dove $t = \tan\frac{x}{2}$.

Si ricavano nel modo seguente: dalla formula di duplicazione del seno

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} =$$

moltiplicando e dividendo per $\cos\frac{x}{2}$

$$= \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = 2t\cdot\cos^2\frac{x}{2} =$$

ricordando *2.1,* vale $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2}$ dunque

$$= 2t\cdot\frac{1}{1+t^2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

perciò $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$.

Per ricavare l'identità rimanente si procede in modo simile:

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = (\text{poiché } \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2}) = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

ovvero $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Poiché le uguaglianze ottenute sono valide per ogni valore dell'angolo (purché diano senso all'espressione) seguono le identità $\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$, $\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$.

6.15 Funzioni goniometriche degli angoli di $15°, 75°$ e loro multipli

Utilizzando alcune delle formule goniometriche viste sinora siamo in grado di calcolare il valore delle funzioni goniometriche degli angoli di 15° con i relativi multipli.

Poiché $15° = 45° - 30°$, in radianti abbiamo $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$; applicando la formula di sottrazione del seno otteniamo

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Procedendo in modo analogo per il coseno si trova

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Dalla definizione della tangente segue

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$$

E' immediato ora determinare le funzioni goniometriche di $75° \leftrightarrow \frac{5}{12}\pi$: 75°e 15° sono angoli complementari, e gli angoli complementari si scambiano fra loro seno e coseno.

Dunque

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 + \sqrt{3}$$

E' immediato ora trovare i valori delle funzioni goniometriche multipli di 15°, utilizzando gli stessi ragionamenti fatti per gli archi associati (tutti gli angoli multipli di 15° individuano sulla circonferenza goniometrica triangoli rettangoli con angoli di 15° e 75°). Ad esempio, $\sin(105°) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ e $\cos(105°) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

6.16 Esercizi svolti

Esercizio 1.

Calcoliamo le funzioni goniometriche di $x + \frac{\pi}{6}$, sapendo che $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e $\sin x = \frac{3}{4}$.

Conoscendo il seno di un angolo che individua un punto sul secondo quadrante, è possibile trovare il coseno con la prima relazione fondamentale.

$$\cos x = -\sqrt{1 - \frac{9}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

Ora utilizziamo la formula di addizione del seno e otteniamo

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{8}$$

Esercizio 2.

Sapendo che $\tan x = \frac{1}{3}$, determiniamo $\sin 2x$.

E' sufficiente utilizzare la formula parametrica del seno: da $\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{9}} = \frac{3}{5}$.

Esercizio 3.

Calcoliamo le funzioni goniometriche di $2x$, sapendo che $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ e $\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Dalla prima relazione fondamentale troviamo $\cos^2 x = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$; poiché $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ il coseno è negativo, dunque $\cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$. E' immediato trovare la tangente: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{1}{2}$.

Esercizio 4.

Calcoliamo $\sin 2x$, $\cos 2x$ sapendo che $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ e $\sin x = -\frac{1}{3}$.

Poiché x individua un punto nel terzo quadrante, sappiamo che $\cos x$ è negativo e possiamo utilizzare la prima relazione per determinarlo: $\cos x = -\sqrt{1 + \frac{1}{9}} = -\frac{\sqrt{10}}{3}$. Quindi

$\sin 2x = 2\sin x \cos x = \frac{2\sqrt{10}}{9}$ e $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = \frac{11}{9}$.

Esercizio 5.

Calcoliamo le funzioni goniometriche di $\frac{x}{2}$, sapendo che $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ e $\cos x = -\frac{1}{8}$.

Poiché $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ segue $\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3}{4}\pi$, dunque $\frac{x}{2}$ individua un punto nel secondo quadrante: perciò $\sin\frac{x}{2} > 0$ e $\cos\frac{x}{2} > 0$.

Dalle formule di bisezione otteniamo

$$\cos\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{8}}{2}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{8}}{2}} = \frac{3}{4}$$

Esercizio 6.

Calcoliamo $\sin\left[\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$. Poniamo $\alpha = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$; si tratta di determinare $\sin\left[\frac{1}{2}\alpha\right]$.

Dalla definizione di arco coseno segue $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \pi$. Dunque $\sin\alpha > 0$ e, applicando la prima relazione otteniamo $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$.

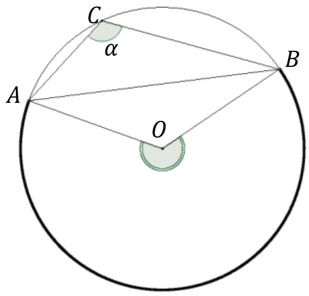
Applicando la formula di bisezione per il seno otteniamo

$$\sin\left[\frac{1}{2}\alpha\right] = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Esercizio 7.

In una circonferenza di centro O la corda AB è sottesa a un angolo alla circonferenza

$A\hat{C}B = \alpha$ tale che $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Determiniamo l'angolo al centro $A\hat{O}B$ corrispondente.



Sappiamo che $A\hat{O}B = 2\alpha$.

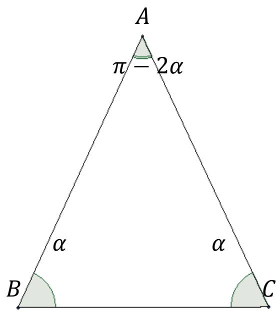
Poiché α è un angolo di un triangolo ($0 < \alpha < \pi$), $\sin\alpha > 0$, dunque dalla prima relazione $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Dunque

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -\frac{7}{9}$$

Esercizio 8.

E' dato il triangolo isoscele di base BC in figura. Sapendo che l'angolo alla base è tale che $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, determiniamo le funzioni goniometriche dell'angolo al vertice.



Vale $\hat{A} = \pi - 2\alpha$. Allora

$$\cos\hat{A} = \cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha = -\frac{1}{8}$$

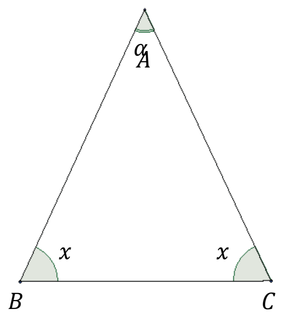
Dalla prima relazione fondamentale

$$\operatorname{sen}(\pi - 2\alpha) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{63}}{8} \text{ e, infine}$$

$$\tan(\pi - 2\alpha) = -\sqrt{63}$$

Esercizio 9.

E' dato un triangolo isoscele ABC in figura. Sapendo che l'angolo al vertice è tale che $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$, determiniamo il seno e il coseno degli angoli alla base.



Vale $x = \frac{\pi-\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Allora

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{3}{8}}$$

Il coseno si può trovare in modo analogo o utilizzando la prima relazione fondamentale; si ottiene $\cos x = \sqrt{\frac{5}{8}}$.

6.17 Esercizi proposti

1	Calcola $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ e $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ sapendo che $\cos x=-\frac{1}{8}$ e $\pi<x<\frac{3}{2}\pi$.
2	Calcola $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ e $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ sapendo che $x=\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$
3	Calcola $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ sapendo che a) $\alpha=\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ b) $\sin\alpha=-\frac{1}{3},\ \pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$ c) $\alpha=\arctan 3$
4	Calcola $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ sapendo che a) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{8},\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$ b) $\tan\alpha=-2\sqrt{2},\ \frac{3}{2}\pi<x<2\pi$ c) $\alpha=\pi-\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8}$
5	Calcola le funzioni goniometriche di 2α sapendo che a) $\tan\alpha=-\sqrt{5}$ b) $\cos\alpha=-\frac{7}{8},\pi<x<\frac{3}{2}\pi$
6	Calcola le funzioni goniometriche di $\alpha=22°\ 30'$.
7	Calcola a) $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right)$ b) $\cos\left[\frac{1}{2}\arctan\left(2\sqrt{6}\right)\right]$ c) $\tan\left(-\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)$
8	E' data una circonferenza di centro O, in cui una corda AB è sottesa a un angolo al centro α tale che $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$. Determina le funzioni goniometriche di un angolo alla circonferenza corrispondente.
9	In una circonferenza di centro O l'angolo α alla circonferenza $A\hat{C}B$è tale che $\tan\alpha=\frac{1}{2}$. Determiniamo le funzioni goniometriche degli angoli del triangolo AOB.
10	In un triangolo isoscele gli angoli alla base hanno il coseno uguale a $\frac{3}{5}$. Determina le funzioni goniometriche dell' angolo al vertice.
11	E' dato un triangolo ABC dove $\hat{B}=30°$ e $\sin\hat{A}=\frac{3}{4}$. Determina le funzioni goniometriche dell'angolo in C (distingui i casi in cui $\widehat{A}$ è acuto o ottuso).

3. Le funzioni $y=Asen(\omega x+\varphi)$ *e* $y=Acos(\omega x+\varphi)$

Le funzioni del tipo $y = Asen(\omega x + \varphi)$ e $y = Acos(\omega x + \varphi)$ sono di grande importanza nelle applicazioni: si utilizzano, ad esempio, per descrivere il moto armonico e come modello per rappresentare la propagazione delle onde.

In questo capitolo vedremo che significato assumono i parametri e come rappresentare graficamente queste funzioni.

Vedremo inoltre una tecnica che ci consentirà di trasformare particolari espressioni contenenti funzioni goniometriche in funzioni del tipo $y = Asen(\omega x + \varphi)$ o $y = Acos(\omega x + \varphi)$: sarà così possibile fornire una rappresentazione grafica che ci consentirà di determinare alcune informazioni utili, come ad esempio il segno della funzione o eventuali punti di massimo e minimo.

6.18 Caratteristiche delle funzioni $y = Asen(\omega x + \varphi)$ *e* $y = Acos(\omega x + \varphi)$

Consideriamo la famiglia delle funzioni

$$y = Asen(\omega x + \varphi)$$

$$y = Acos(\omega x + \varphi)$$

- A si chiama *ampiezza*
- ω è detta *pulsazione*
- φ è la *fase*

I suddetti parametri hanno una particolare influenza sul comportamento della funzione e quindi sull'andamento del grafico.

La pulsazione ω ci permette di determinare il *periodo* T della funzione: vale infatti la relazione

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

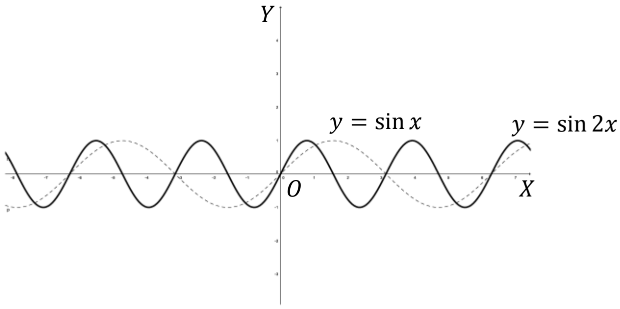
Ad esempio, la funzione

$$y = \sin(2x)$$

ha pulsazione $\omega = 2$ dunque periodo $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Dunque tutto l'andamento della funzione è descritto in un intervallo lungo π, e non 2π come per la funzione $y = \sin x$.

Il grafico è

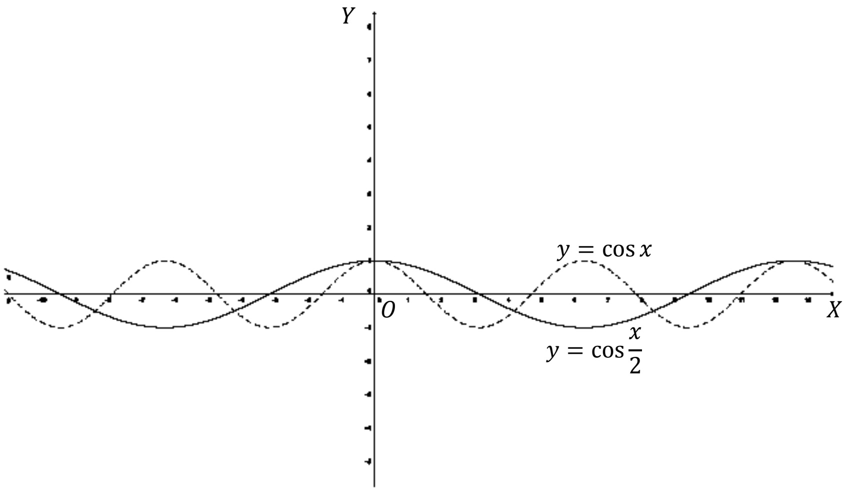


Diamo un altro esempio e consideriamo la funzione

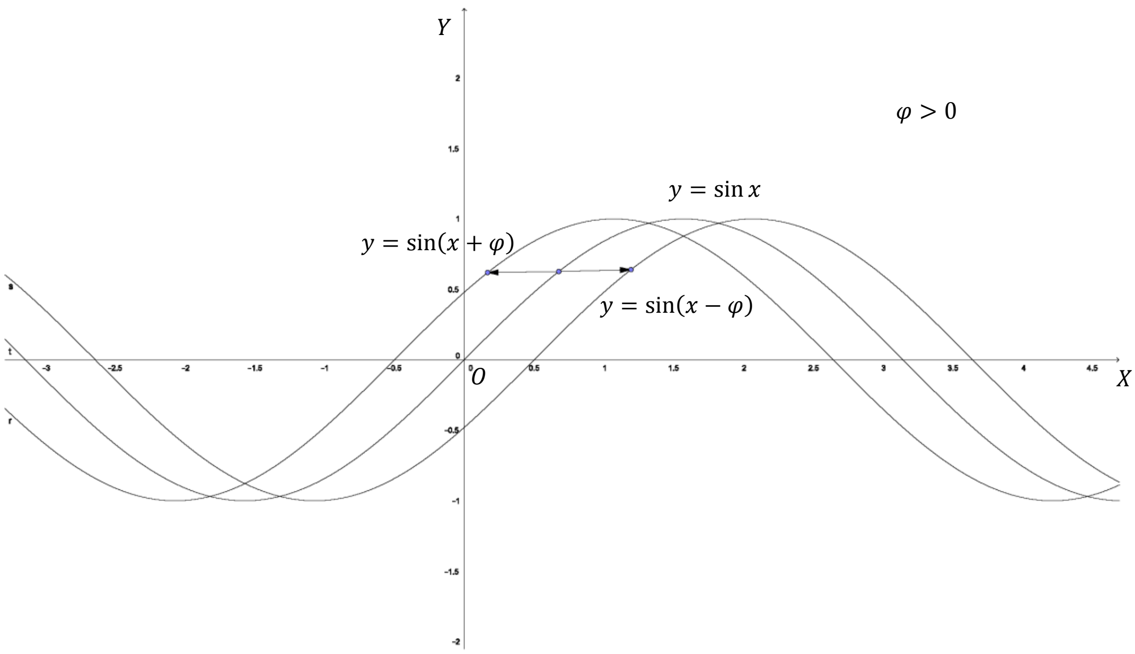
$$y = \cos\frac{x}{2}$$

In questo caso la pulsazione vale $\omega = \frac{1}{2}$, dunque otteniamo un periodo $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$: la funzione si svilupperà non più in un intervallo di lunghezza 2π, bensì in un intervallo di misura 4π, lungo il doppio.

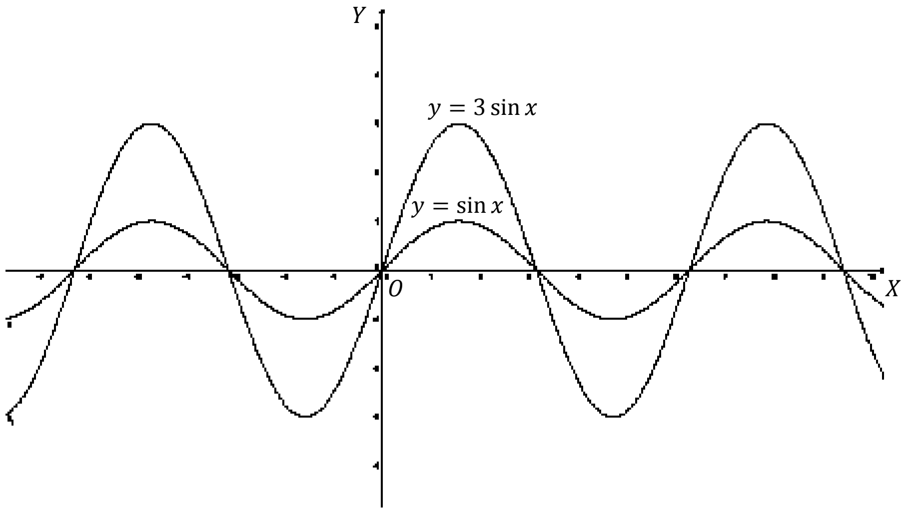
Il grafico della funzione è



La fase φ trasforma il grafico del seno e del coseno operando con una *traslazione orizzontale*: verso destra se $\varphi < 0$, verso sinistra se $\varphi > 0$, come indicato nei seguenti esempi



L'ampiezza A determina una *dilatazione* (o una *contrazione*) *verticale* del grafico: il seno e il coseno hanno massimo e minimo rispettivamente *1* e *-1*; le funzioni ottenute moltiplicando per il fattore A assumono un massimo e un minimo di A e $-A$, come indicato nel seguente esempio.

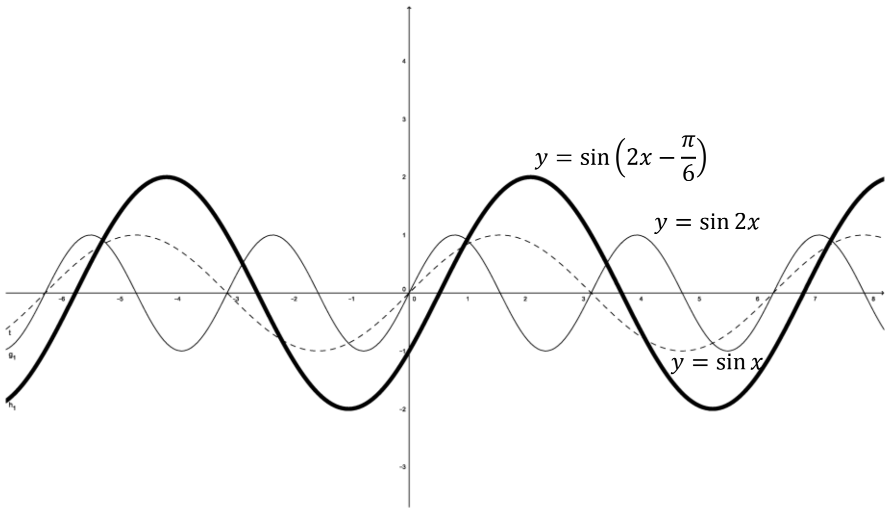


Per descrivere funzioni "complicate", come ad esempio

$$y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

si procede passo dopo passo, rappresentando prima di tutto la funzione $y = \sin x$; dopodiché si valuta la pulsazione $\omega = 2$ che determina il periodo $T = \pi$. Si trasla poi il grafico orizzontalmente verso destra a causa della fase $\varphi = \frac{\alpha}{\omega} = -\frac{\pi}{12}$ e si dilata infine il grafico verticalmente di un fattore *2*.

Questo procedimento è descritto dalla seguente figura



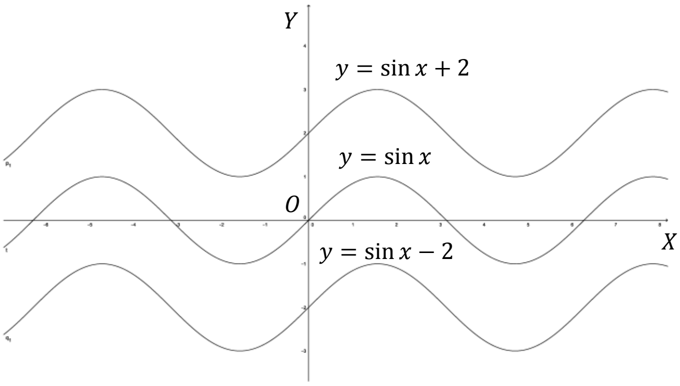
Possiamo così trarre numerose informazioni sulla funzione: ad esempio, il codominio è l'insieme $C = [-2,2]$, e che la funzione nell'intervallo $[0, \pi]$ assume il valore massimo *2* in $x = \frac{5}{12}\pi$ e il valore minimo *-2* in $x = \frac{11}{12}\pi$.

Oltre alla dilatazione verticale dovuta all'ampiezza, alla dilatazione orizzontale dovuta alla pulsazione e alla traslazione orizzontale dovuta alla fase esistono altre trasformazioni che possono subire i grafici: vediamone alcune.

- *traslazione verticale*

Data la funzione $y = f(x)$, il grafico della funzione $y = f(x) + k$ si ottiene mediante una traslazione verticale: verso l'alto se $k > 0$ e verso il basso se $k < 0$.

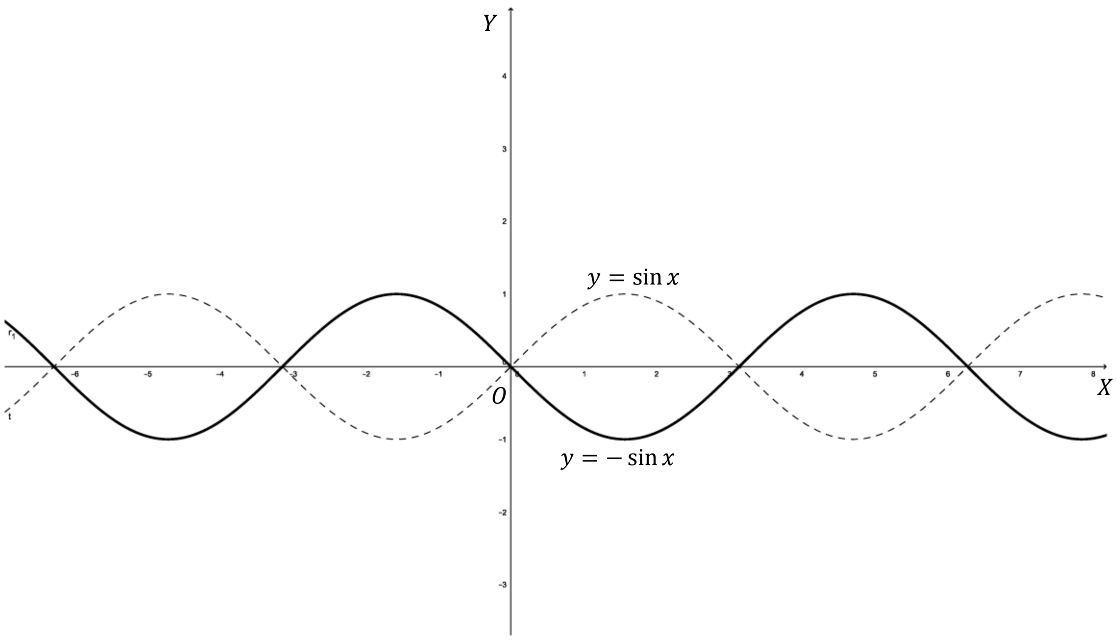
Ad esempio



- *simmetria rispetto all'asse x*

Data la funzione $y = f(x)$, il grafico della funzione $y = -f(x)$ si ottiene mediante una simmetria rispetto all'asse *x.*

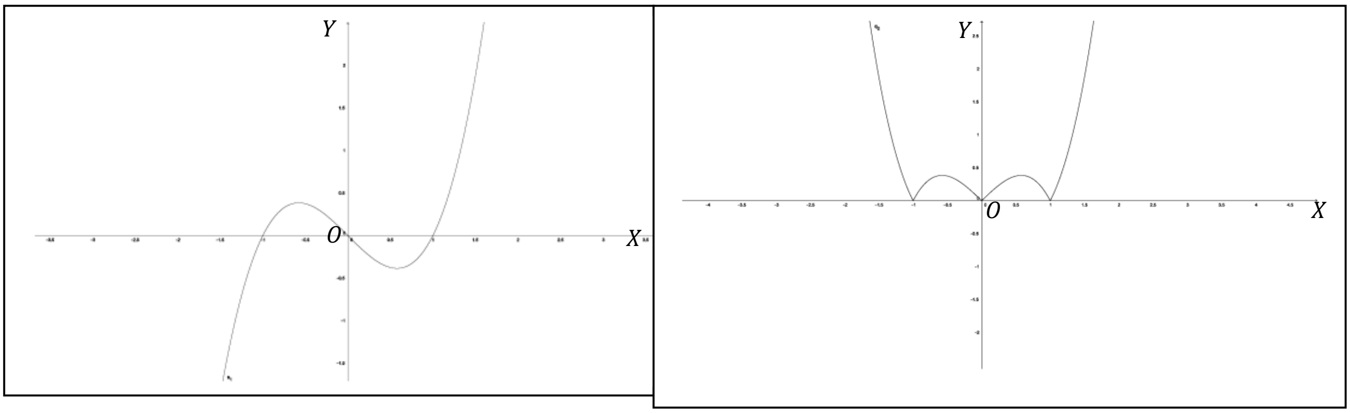
Ad esempio



- *funzioni contenenti valori assoluti*

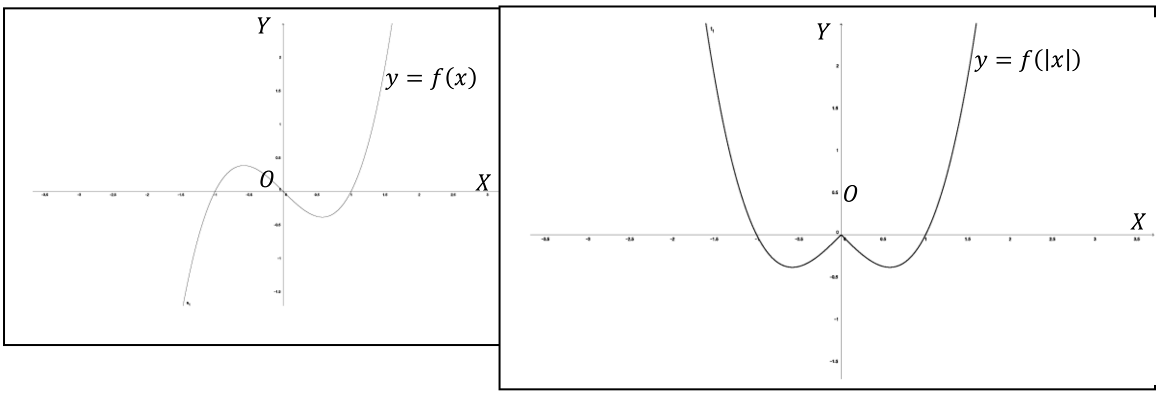
  a) Data la funzione $y = f(x)$, il grafico della funzione $y = |f(x)|$ si ottiene determinando anzitutto il grafico della funzione $y = f(x)$: dopodiché si lascia inalterata la parte di grafico dove la funzione è positiva, e si simmetrizza rispetto all'asse x la parte dove la funzione è negativa.

  Ad esempio



b) Data la funzione $y = f(x)$, il grafico della funzione $y = f(|x|)$ si ottiene dalla funzione f lasciando inalterata la parte di grafico con i punti di ascissa positiva, e prendendo poi questa parte e simmetrizzando rispetto all'asse delle y.

Ad esempio



6.19 Metodo dell'angolo aggiunto

Si chiama *combinazione lineare di seno e coseno* un'espressione del tipo

$$a\sin x + b\cos x$$

dove a e b sono numeri reali.

E' una combinazione lineare, ad esempio, $2\sin x - \cos x$.

Il *metodo dell'angolo aggiunto* consente di trasformare una combinazione lineare di seno e coseno in un'espressione del tipo $y = Asen(\omega x + \varphi)$ o $y = Acos(\omega x + \varphi)$.

Ne esistono diverse versioni: noi descriveremo quella che trasforma la combinazione lineare $a\sin x + b\cos x$ in $y = Asen(\omega x \pm \varphi)$, dove $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Data l'espressione

$$a\sin x + b\cos x\,, \qquad b > 0$$

si determina il numero

$$k = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Vale

$$a\sin x + b\cos x = k \cdot \left(\frac{a}{k}\sin x + \frac{b}{k}\cos x\right)$$

Si può dimostrare che esiste un angolo α, $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ tale che

$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{a}{k} \\ \cos\alpha = \dfrac{b}{k} \end{cases}$$

perciò

$$k \cdot \left(\frac{a}{k}\sin x + \frac{b}{k}\cos x\right) = k \cdot (\cos\alpha \sin x + \sin\alpha \cos x)$$

l'espressione contenuta nella parentesi rappresenta lo sviluppo della formula di addizione del seno, dunque otteniamo

$$k \cdot (\cos\alpha \sin x + \sin\alpha \cos x) = k \cdot \sin(x + \alpha)$$

In definitiva

$$a\sin x + b\cos x = k \cdot \sin(x + \alpha)$$

che è l'espressione del tipo cercato.

Nel caso in cui si voglia trasformare una combinazione lineare del tipo

$$a\sin x - b\cos x\,, \qquad b > 0$$

si procede in modo del tutto analogo, ottenendo

$$a\sin x - b\cos x = k \cdot \sin(x - \alpha)$$

La combinazione lineare $a\cos x \pm b\sin x\,, b > 0$ può essere ricondotta a una forma del tipo $Acos(x+\alpha)$ procedendo come segue: posto $k=\sqrt{a^2+b^2}$ abbiamo che

$$a\cos x \pm b\sin x = k\cdot\left(\frac{a}{k}\cos x \pm \frac{b}{k}\sin x\right)$$

Scegliamo ora un angolo α, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ tale che $\frac{a}{k}=\cos\alpha$ e $\frac{b}{k}=\sin x$; otteniamo, grazie alla formula di addizione del coseno

$$k\cdot\left(\frac{a}{k}\cos x \pm \frac{b}{k}\sin x\right) = k\cdot(\cos\alpha\cos x \pm \sin x\sin x) = k\cdot\cos(x\pm\alpha)$$

Abbiamo dunque mostrato che esiste un numero positivo k e un angolo α nel primo quadrante tali che

$$a\cos x \pm b\sin x = k\cdot\cos(x\pm\alpha)$$

Esempio 1.
Trasformiamo l'espressione

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x$$

utilizzando il metodo dell'angolo aggiunto.

$$k=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2$$

dunque

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$$

L'angolo α, $0\le\alpha<\frac{\pi}{2}$ tale che

$$\begin{cases}\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos\alpha = \dfrac{1}{2}\end{cases}$$

è $\alpha=\frac{\pi}{3}$; segue che

$$2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x - \sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)$$

e, infine

$$2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

Abbiamo mostrato quindi che

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

Esempio 2.

Determiniamo i valori dei parametri a, b, c in modo che la funzione

$$y = a\sin x + b\cos x + c$$

abbia il grafico che passi per il punto $A\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$ e che abbia come codominio l'intervallo [1,5].

Poiché dobbiamo trovare *tre* quantità, dobbiamo cercare *tre* equazioni che le contengono.

L'appartenenza del punto A al grafico implica che

$$2 = a\sin\frac{\pi}{2} + b\cos\frac{\pi}{2} + c$$

ovvero

$$2 = a + c$$

Dobbiamo trovare altre due equazioni.

La combinazione lineare $a\sin x + b\cos x$ sappiamo che grazie al metodo dell'angolo aggiunto è esprimibile come $k\sin(x+\alpha)$, con $k = \sqrt{a^2+b^2}$ e α un angolo opportuno: dunque la funzione data la possiamo scrivere come

$$y = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha) + c$$

Poiché il seno è una grandezza variabile tra *-1* e *1*, y assumerà valori compresi tra $-\sqrt{a^2+b^2}+c$ e $\sqrt{a^2+b^2}+c$, ovvero il codominio della funzione è l'intervallo

$$\left[-\sqrt{a^2+b^2}+c, \sqrt{a^2+b^2}+c\right]$$

Affinché il codominio sia [1,5] dobbiamo imporre che

$$-\sqrt{a^2+b^2}+c = 1$$

e

$$\sqrt{a^2+b^2}+c = 5$$

Abbiamo perciò trovato le due equazioni rimanenti. Impostando e risolvendo il sistema troviamo $a = -1$, $b = \pm\sqrt{3}$ e $c = 3$.

Le funzioni che soddisfano le richieste iniziali sono due e precisamente

$$y = -\sin x + \sqrt{3}\cos x + 3$$

e

$$y = -\sin x - \sqrt{3}\cos x + 3$$

Utilizzando le proprietà delle funzioni goniometriche e le relative formule, vediamo come realizzare il grafico di alcune funzioni.

Esempio 1.

Rappresentiamo graficamente la funzione

$$y = \sin x + \cos x$$

e determiniamo poi i punti di massimo e di minimo tra 0 e 2π.

Trasformiamo la combinazione lineare

$$\sin x + \cos x$$

col metodo dell'angolo aggiunto.

$$k = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

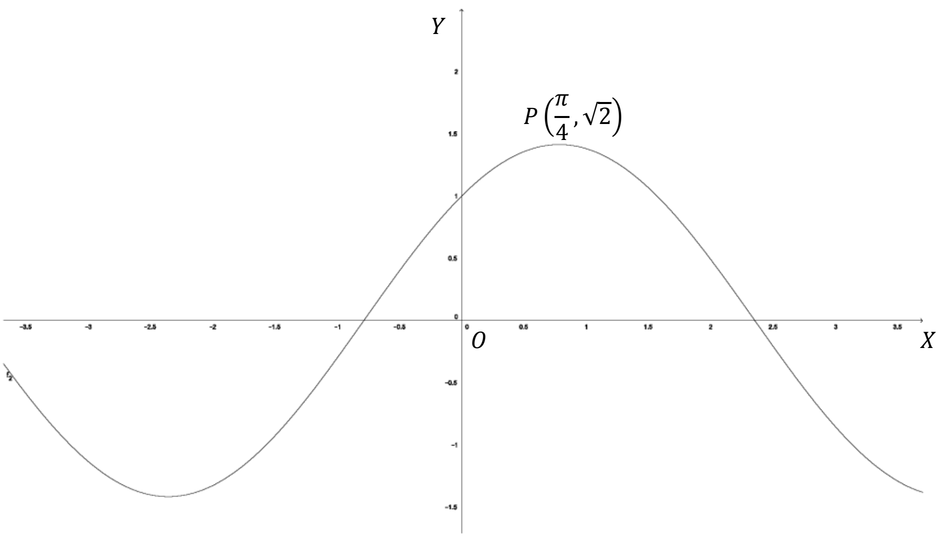
dunque

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

In definitiva

$$y = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

la cui rappresentazione grafica è



La funzione presenta perciò un massimo $M = \sqrt{2}$ in $x = \frac{\pi}{4}$ e un minimo $m = -\sqrt{2}$ in $x = \frac{5}{4}\pi$.

Esempio 2.

Rappresentiamo graficamente la funzione

$$y = \cos 2x - \sin 2x + 1$$

Utilizziamo il metodo dell'angolo aggiunto per trasformare la combinazione lineare $\cos 2x - \sin 2x$.

Poiché $k = \sqrt{2}$ otteniamo

$$\cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x\right) = \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos 2x - \cos\frac{\pi}{4}\sin 2x\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$

dunque

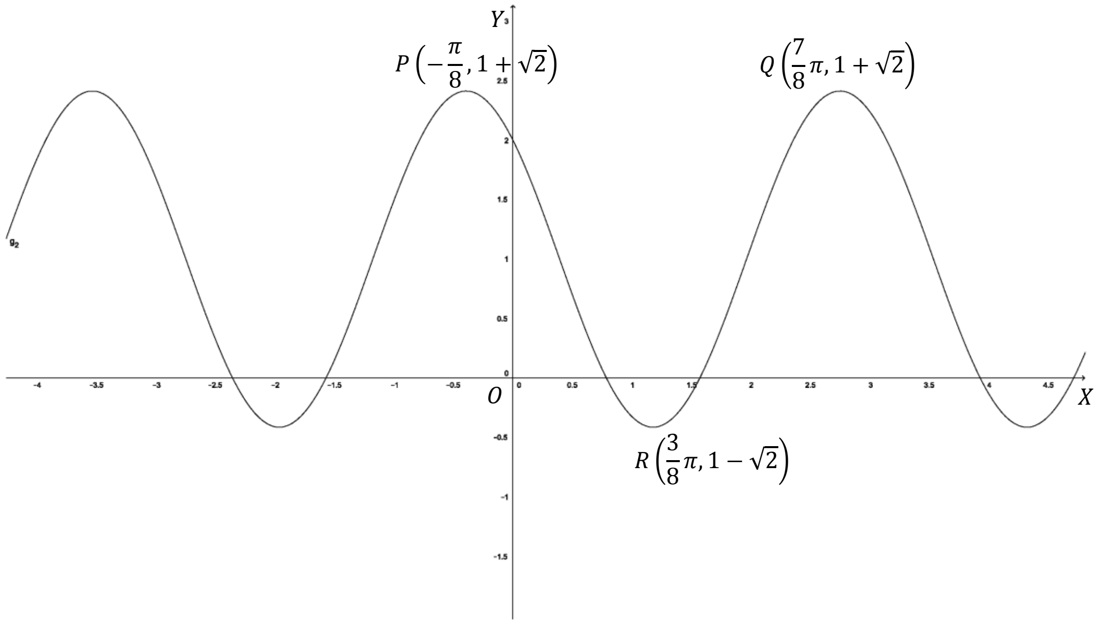
$$y = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + 1$$

A questo punto, conviene "trasportare il meno" fuori dall'argomento del seno: questo, come abbiamo visto, è un passaggio lecito poiché il seno è una funzione dispari.

Otteniamo

$$y = -\sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$$

Per determinare il grafico, partiamo dal seno e ricaviamo il grafico di $y = \sin 2x$ dimezzando il periodo; dopodiché effettuiamo una traslazione orizzontale verso destra di $\frac{\pi}{4}$, una dilatazione verticale del fattore $\sqrt{2}$ e una simmetria rispetto all'asse delle ascisse. Infine trasliamo verso l'alto di un'unità e otteniamo



Esempio 3.
Rappresentiamo graficamente la funzione

$$y = \sin^2 x$$

La funzione non è di una delle tipologie esaminate in precedenza; è costituita da un termine di *grado due* : occorre perciò *linearizzarla*, ovvero utilizzare le formule goniometriche per trasformala in un'espressione di *grado uno*.

E'sufficiente ricordare la *formula di bisezione del seno*

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

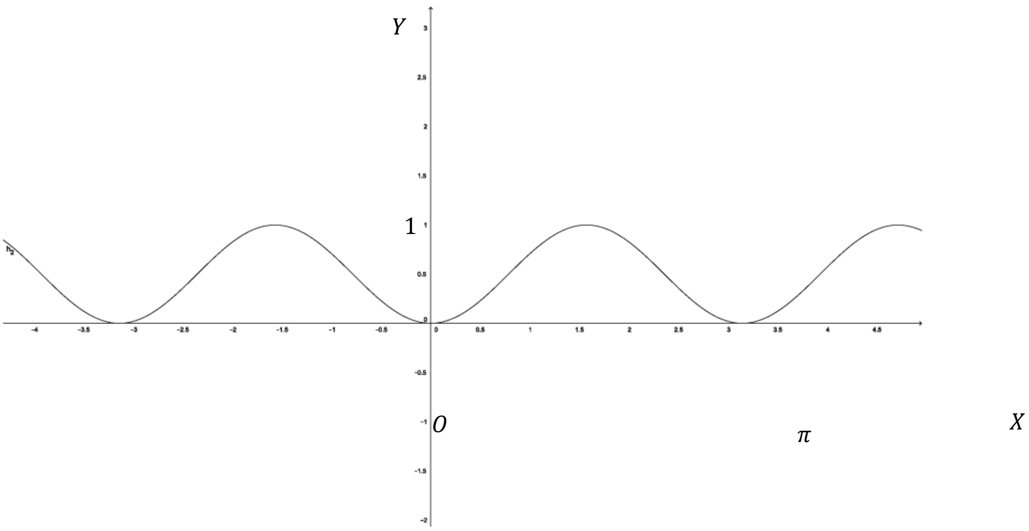
Dunque

$$y = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$$

Il grafico di questa funzione siamo in grado di realizzarlo facilmente, rappresentando progressivamente il grafico delle seguenti funzioni

- $y = \cos x$
- $y = \cos 2x$; si ottiene dal coseno, come abbiamo visto, con un periodo di $T = \pi$
- $y = \frac{1}{2}\cos 2x$; si contrae di un coefficiente $\frac{1}{2}$ verticalmente
- $y = -\frac{1}{2}\cos 2x$; si ribalta intorno all'asse x
- $y = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$; si trasla verticalmente verso l'alto di $\frac{1}{2}$

Si ottiene così



Osserviamo esplicitamente che, essendo la pulsazione $\omega = 2$, la funzione ha un periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

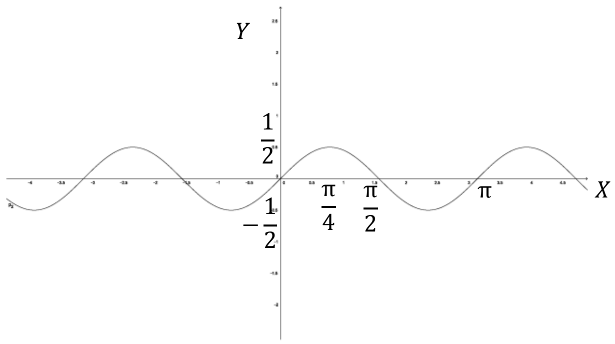
Esempio 4.
Rappresentiamo graficamente la funzione

$$y = \sin x \cos x$$

Come nel caso precedente, la funzione è costituita da un termine di secondo grado: bisogna linearizzarla. A tal scopo si può ricorrere alla formula di duplicazione del seno $\sin 2x = \sin x \cos x$ ottenendo

$$y = \frac{1}{2}\sin 2x$$

Per rappresentare graficamente questa funzione è sufficiente partire dal grafico del seno: dimezzando il periodo si ottiene la funzione $y = \sin 2x$ e si contrae poi verticalmente di un fattore $\frac{1}{2}$. Si ottiene così



Esempio 5.
Realizziamo il grafico e determiniamo il periodo e i punti di massimo e minimo di

$$y = 2\sin^2 x - 4\cos^2 x$$

La funzione contiene due termini che bisogna linearizzare: ricordando le formule di bisezione per il seno e il coseno

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

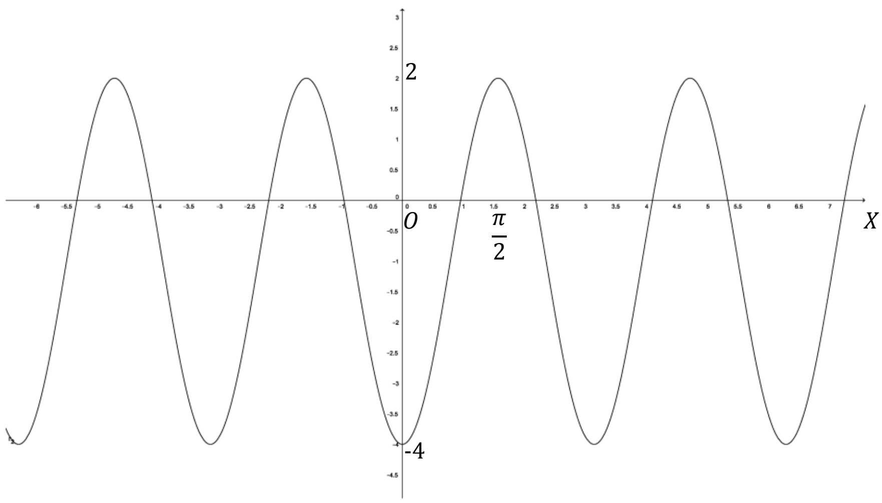
otteniamo

$$y = -3\cos 2x - 1$$

La funzione ha periodo $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Realizzato il grafico del coseno e di $y = \cos 2x$, si dilata verticalmente di un fattore *3*, si simmetrizza intorno all'asse x e si trasla infine verticalmente verso il basso di *1* ottenendo così

Y



La funzione assume il massimo $M = 2$ nei punti $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ e minimo $m = -4$ in $x = k\pi$.

Esempio 6.
Rappresentiamo graficamente la funzione

$$y = \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x + 1$$

Per realizzare il grafico di questa funzione dobbiamo riconoscere che l'espressione $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x$ è una combinazione lineare di seno e coseno con argomento $2x$; è opportuno quindi applicare il metodo dell'angolo aggiunto.

$$k = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

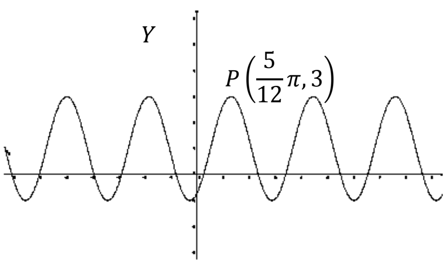
dunque

$$\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 2\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin 2x - \sin\frac{\pi}{3}\cos 2x\right) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

perciò

$$y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$$

Una volta realizzato il grafico della funzione $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, è sufficiente traslare verticalmente verso l'alto di *1*.



Esempio 7.
Determiniamo il valore del parametro k in modo che la funzione $y = \sin(kx)$ abbia periodo $T = \frac{\pi}{2}$.

Poiché $T = \frac{2\pi}{k}$ segue $\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{k}$ da cui $k = 4$; la funzione cercata è pertanto $y = \sin(4x)$.

Esempio 8.
Determiniamo il periodo T della funzione $f(x) = \sin 3x - \cos 4x$.

Il periodo della funzione è ottenuto dal *minimo comune multiplo* fra il periodo T_1 di $\sin 3x$ e il periodo T_2 di $\cos 4x$. Poiché $T_1 = \frac{2\pi}{3}$ e $T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ occorre ridurli allo stesso denominatore. Otteniamo così $T_1 = \frac{4\pi}{6} = 4\frac{\pi}{6}$ e $T_2 = \frac{3\pi}{6} = 3\frac{\pi}{6}$: il minimo comune multiplo è quindi

$T = 12\frac{\pi}{6} = 2\pi$.

Esercizio 13.
Traccia il grafico della seguente funzione, determinando il periodo e i punti di massimo e minimo nell'intervallo $[0,2\pi]$.

$$y = 2\sin^2 x - 2\sin x\cos x$$

La funzione contiene due termini di secondo grado: occorre linearizzarli, utilizzando le opportune formule goniometriche:

- dalla formula di bisezione del seno $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$
- dalla formula di duplicazione del seno $2\sin x\cos x = \sin 2x$

e, sostituendo

$$y = 1 - \cos 2x - \sin 2x$$

ovvero

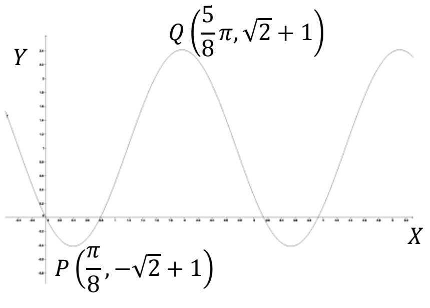
$$y = -(\cos 2x + \sin 2x) + 1$$

La funzione ha quindi periodo $T = \pi$; per rappresentarla graficamente trasformiamo $\cos 2x + \sin 2x$ col metodo dell'angolo aggiunto, ottenendo $\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

La funzione è quindi

$$y = -\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$$

il cui grafico è



La funzione ha un minimo $m = -\sqrt{2} + 1$ in $x = \frac{\pi}{8}$ e un massimo $M = \sqrt{2} + 1$ in $x = \frac{5}{8}\pi$.

6.21 Esercizi proposti

O X

1	Determina il periodo delle seguenti funzioni. a) $y=\cos^2 x$ b) $y=\sin x\cos x$ c) $y=(\sin x+\cos x)^2$ d) $y=\sin^2\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$
2	Realizza il grafico delle seguenti funzioni; determina i punti di massimo e di minimo e il codominio della funzione. Scrivi esplicitamente il periodo della funzione. a) $y=\sin x+1$ b) $y=2\cos x$ c) $y=\tan\lvert x\rvert$ d) $y=\lvert\tan x\rvert$ e) $y=\lvert\tan\lvert x\rvert\rvert$ e) $y=-2\sin x+2$ f) $y=-3\sin 2x-3$ g) $y=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ h) $y=3\lvert\sin(\pi-x)\rvert$ i) $y=\left\lvert\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)\right\rvert-1$ l) $y=\cos\frac{x}{2}, x\in[0,\pi]$ m) $y=2\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right), x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ n) $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$ o) $y=\cos\lvert x\rvert$ p) $y=\sin\lvert x\rvert$ q) $y=\tan\left\lvert x-\frac{\pi}{2}\right\rvert$
3	Traccia il grafico delle seguenti funzioni lineari; individua il massimo e il minimo e il relativo codominio. Scrivi esplicitamente il periodo della funzione. a) $y=\cos 2x-\sin 2x$ b) $y=\sin x+\cos x+1, x\in[0,\pi]$ c) $y=3\sin x-4\cos x$ d) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos x$ e) $y=\sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x$ f) $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$
4	Traccia il grafico delle seguenti funzioni contenenti termini di secondo grado; individua il massimo e il minimo e il relativo codominio. Scrivi esplicitamente il periodo della funzione. a) $y=\cos^2 x$ b) $y=1-2\sin x\cos x$ c) $y=\sin 2x\cos 2x$ d) $y=2\sqrt{3}\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sqrt{3}$ e) $y=4\cos x\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ f) $y=1-2\cos^2 x$ g) $y=\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$
5	Traccia il grafico della funzione $y=\sqrt{2-2\cos x}$.
6	Determina i valori dei parametri affinché a) $y=\cos(ax)$ abbia periodo π b) $y=a\sin x+b$ abbia come immagine $[0,4]$ c) $2\sin(ax)=1$ abbia una sola soluzione nell'intervallo $[0,2\pi]$ d) $y=a\sin x+b\cos x+c$ abbia come immagine $[-4,4]$ e un massimo $x=\frac{\pi}{4}$; rappresenta graficamente la funzione trovata. e) $y=a\cos^2 x+b, a>0$ abbia per codominio $[-4,4]$; rappresenta graficamente la funzione trovata.
7	Considera la funzione $y=f(x)=a\sin x+b\cos x$ a) Determina i valori dei parametri affinché la funzione passi per i punti $\left(0,\sqrt{3}\right)$ e $\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$; b) Traccia il grafico della funzione nell'intervallo $[0,2\pi]$; c) Rappresenta $y=\lvert f(x)\rvert$; d) Determina il periodo di $y=\lvert f(x)\rvert^2$.
8	E' dato il grafico di una funzione $y=f(x)$; indica come si ottiene il grafico della funzione $g(x)=\frac{\lvert f(x)\rvert+f(x)}{2}$. Utilizza le tue considerazioni per realizzare il grafico di $y=\frac{\lvert\cos x\rvert+\cos x}{2}$.

4. Equazioni e disequazioni goniometriche

Chiamiamo *equazioni goniometriche* le equazioni che hanno l'incognita che compare solo all'interno degli argomenti di funzioni goniometriche.

Sono equazioni goniometriche, ad esempio,

- $\sin x = \frac{1}{3}$
- $\tan^2 x - 1 = 0$
- $\cos 2x - \sin 2x + 1 = 0$

Non sono equazioni goniometriche

- $x \sin\frac{\pi}{2} = 1$
- $x \sin^3 x = x - 1$

Diremo che un numero è *una soluzione di un'equazione goniometrica* se

- può essere sostituito al posto dell'incognita
- rende vera l'uguaglianza

L'insieme che contiene tutte le soluzioni di un'equazione goniometrica viene detto *soluzione dell'equazione .*

Risolvere un'equazione goniometrica significa determinare l'insieme delle soluzioni.

6.22 Equazioni goniometriche elementari

Se k è un numero reale e $f(x)$ una espressione che dipende da x chiamiamo *equazioni elementari* equazioni del tipo

- $\sin f(x) = k$
- $\cos f(x) = k$
- $\tan f(x) = k$
- $\cot f(x) = k$

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.

$$\sin x = 2$$

Sappiamo che il seno è una *funzione limitata* : in particolare è un numero compreso tra *-1* e *1.* Nessun numero può rendere vera l'uguaglianza: non esistono perciò soluzioni e la soluzione è l'insieme vuoto

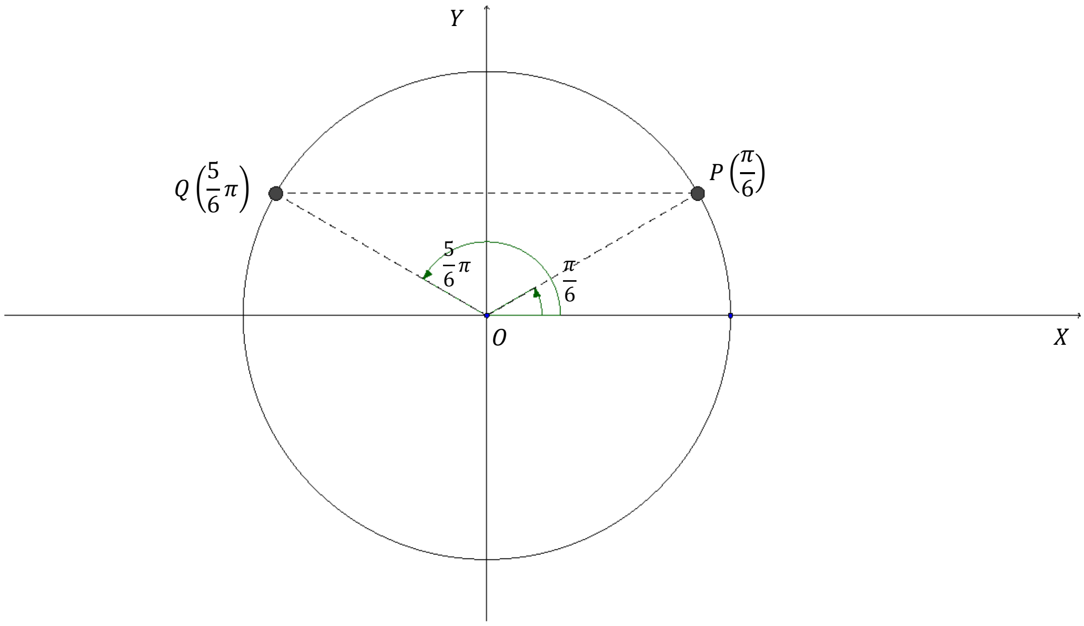
$$S = \emptyset$$

Esempio 2.

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

Cerchiamo la totalità dei numeri che rende vera l'uguaglianza, ovvero *tutti gli angoli* che individuano un seno uguale a $\frac{1}{2}$: questo ci porta a cercare tutti i punti sulla circonferenza goniometrica che hanno la coordinata y uguale a $\frac{1}{2}$.

I punti P e Q in figura individuano le soluzione.



E' fondamentale osservare che noi cerchiamo *gli angoli* che soddisfano l'uguaglianza: le soluzioni sono perciò date dagli *infiniti percorsi* che individuano il punto P e dagli infiniti percorsi che individuano il punto Q.

Il numero $\frac{1}{2}$ abbiamo visto essere un valore notevole. Le soluzioni sono pertanto

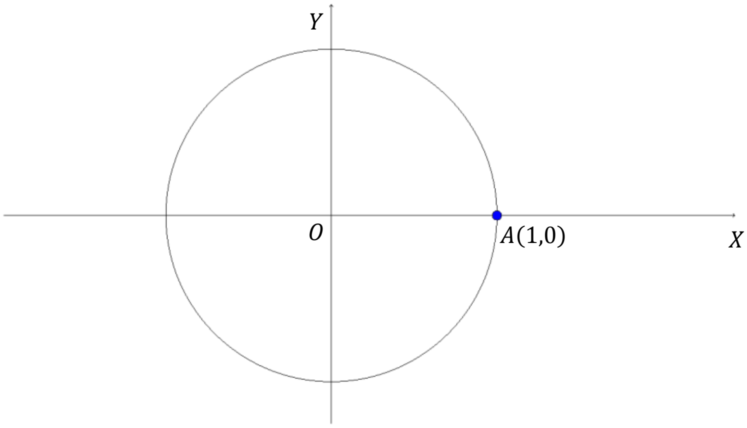
$$P \to x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$Q \to x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Esempio 3.

$$\cos x = 0$$

Il solo punto della circonferenza goniometrica che ha l'ascissa che vale *1* è il punto $A(1,0)$



La soluzione dell'equazione è quindi

$$A \to x = 0 + 2k\pi$$

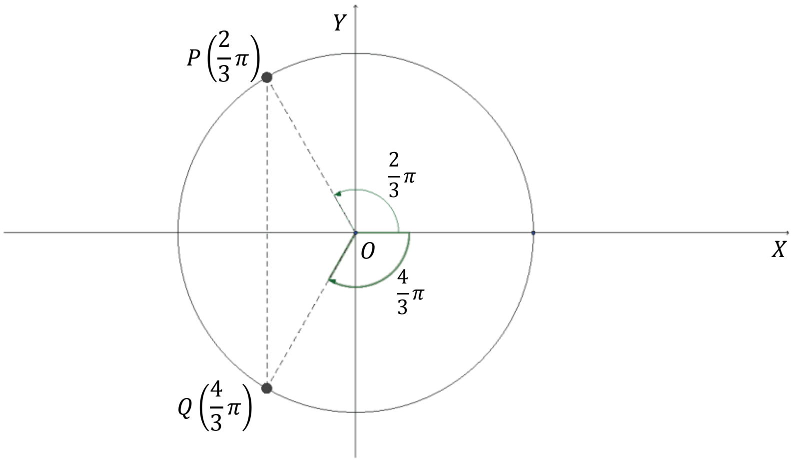
o, più brevemente

$$A \to x = 2k\pi$$

Esempio 4.

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}$$

In questo caso l'angolo, il "percorso", è $2x$. Essendo il coseno di un angolo l'ascissa di un punto sulla circonferenza goniometrica, i punti che individuano il coseno di valore $-\frac{1}{2}$ sono descritti dalla seguente figura



La totalità degli angoli che individuano i punti P e Q sono

$$P \to 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$Q \to 2x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

Osserviamo esplicitamente che il punto Q è individuato anche dall'angolo $-\frac{2\pi}{3}$: in questo modo le due eguaglianze sopra posso essere espresse dall'unica espressione $2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

L'equazione non è ancora risolta: per determinare x dobbiamo dividere primo e secondo membro per *2* (o, equivalentemente, moltiplicare per $\frac{1}{2}$): otteniamo così

$$P \to x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$Q \to x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

che costituisce la soluzione della equazione.

Esempio 5.
Risolviamo

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1$$

L'unico punto sulla circonferenza goniometrica con ordinata *1* è $B(0,1)$ perciò le soluzioni sono date da

$$\frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

moltiplicando per $\frac{2}{\pi}$ i termini dell'uguaglianza otteniamo le soluzioni

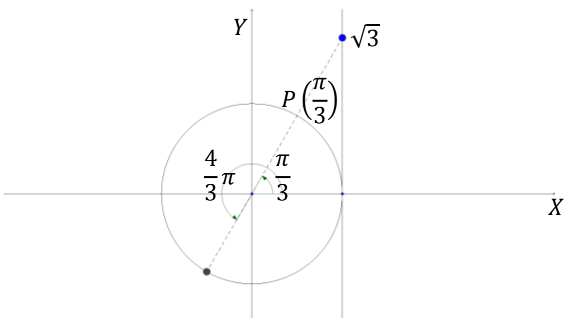
$$x = 1 + 4k$$

Questo è un esempio interessante di equazione che ha per soluzione solo numeri interi, quelli del tipo $1 + 4k$, con k numero intero arbitrario: se $k = 0$ otteniamo la soluzione 1, se $k = 1$ otteniamo la soluzione 5, se $k = -1$ otteniamo -3, e così via.

Esempio 6.

$$\tan x = \sqrt{3}$$

Il valore della tangente è notevole, e l'abbiamo già esaminato. Ricordiamo la rappresentazione geometrica della tangente (e che $\sqrt{3} \approx 1{,}7$)



I punti sulla circonferenza che individuano il valore cercato della tangente sono *P* e *Q:* sono gli estremi di un diametro e li chiameremo *antipodali*.

Si passa dall'uno all'altro effettuando un percorso lungo mezza circonferenza, ovvero effettuando un percorso lungo π.

Pertanto, la totalità dei percorsi che li individuano possono essere espressi dall'unica scrittura

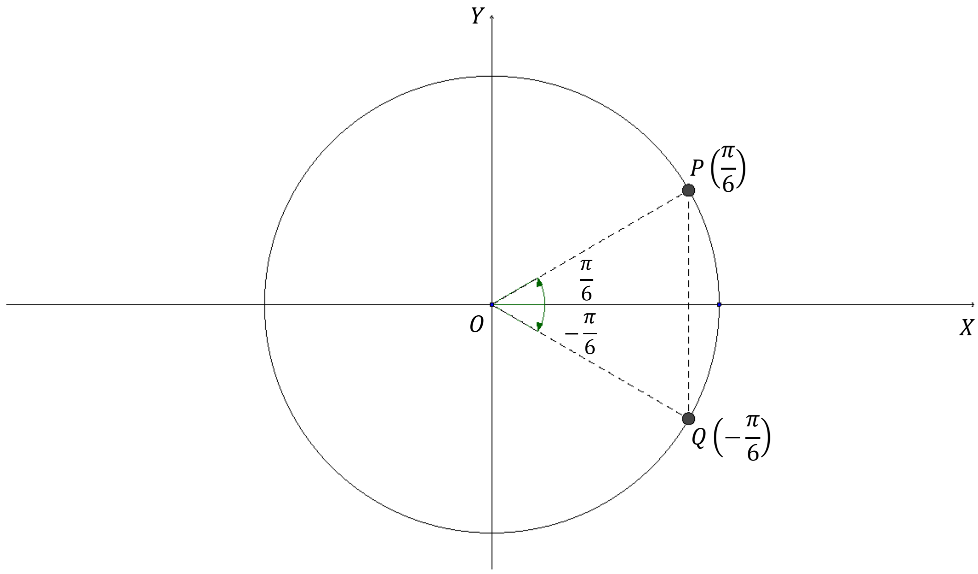
$$P, Q \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

che costituisce la soluzione della disequazione.

Esempio 6

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

I punti sulla circonferenza goniometrica che hanno l'ascissa del valore di $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sono indicati in figura



Come abbiamo visto i punti P e Q sono individuati dagli angoli $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ e $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ dunque

$$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ 2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Ora è sufficiente risolvere le equazioni di primo grado così ottenute: sommando $\frac{\pi}{4}$ ad ambo i membri delle equazioni otteniamo

$$2x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \ \vee \ 2x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$$

e moltiplicando per $\frac{1}{2}$

$$x = \frac{5\pi}{24} + k\pi \ \vee \ x = \frac{5\pi}{24} + k\pi$$

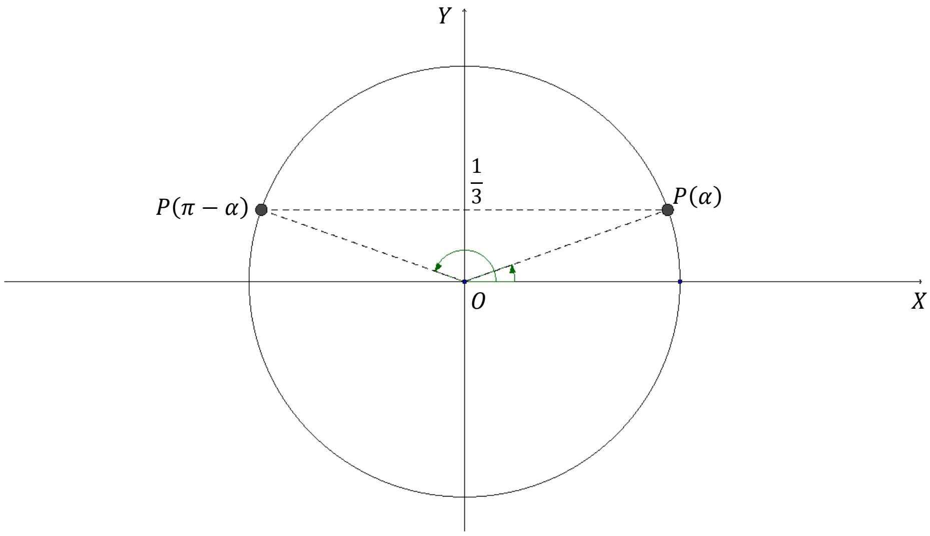
che è precisamente la soluzione dell'equazione.

Esempio 7.

$$\sin x = \frac{1}{3}$$

In questo caso non abbiamo un valore "notevole" per il seno.

La situazione è descritta dalla figura seguente



Chiamiamo α l'angolo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ il cui seno valga $\frac{1}{3}$: le soluzioni della equazione sono dunque

$$P \rightarrow x = \alpha + 2k\pi$$

$$Q \rightarrow x = \pi - \alpha + 2k\pi$$

Ma, ricordando la definizione di *arcoseno,* viene subito che $\alpha = \arcsin\frac{1}{3}$: la soluzione dell'equazione è pertanto

$$P \rightarrow x = \arcsin\frac{1}{3} + 2k\pi$$

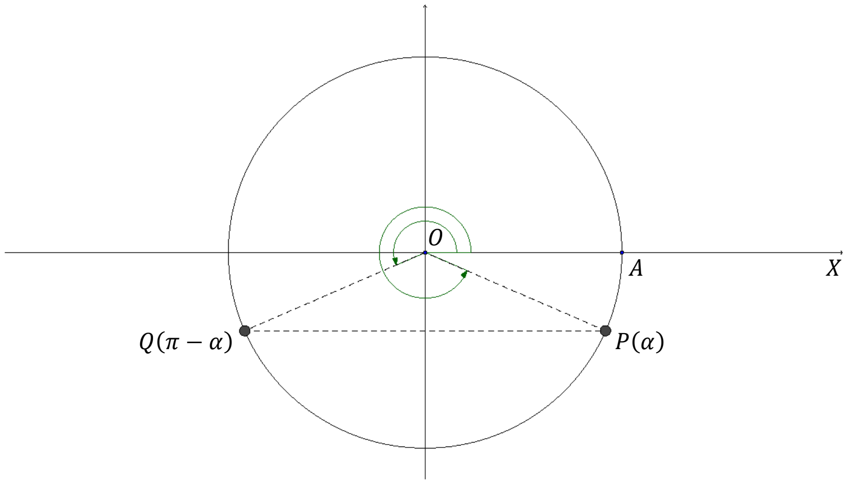
$$Q \rightarrow x = \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2k\pi$$

Esempio 8.

$$\sin x = -\frac{2}{5}$$

La situazione è simile alla precedente, e descritta dalla seguente figura

Y



L'angolo α , $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ che individua il punto P è precisamente $\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right)$ che rappresenta la *lunghezza orientata (in questo caso negativa) dell'arco* $\widehat{AP}$.

La misura dell'arco $\widehat{AR}$ è l'angolo $-\alpha=-\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right)=\arcsin\left(\frac{2}{5}\right)$: questo ci consente di determinare un percorso che individua il punto Q ovvero $\pi+\arcsin\left(\frac{2}{5}\right)$.

La soluzione dell'equazione è dunque

$$P\rightarrow x=\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right)+2k\pi$$

$$Q\rightarrow x=\pi+\arcsin\left(\frac{2}{5}\right)+2k\pi$$

6.23 Equazioni goniometriche del tipo $sin=sin, cos=cos, sin=cos, tan=tan$

Ci proponiamo di risolvere equazioni del tipo

$$\sin f(x)=\sin g(x)$$

$$\cos f(x)=\cos g(x)$$

$$\sin f(x)=\cos g(x)$$

$$\tan f(x)=\tan g(x)$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono espressioni che dipendono da x.

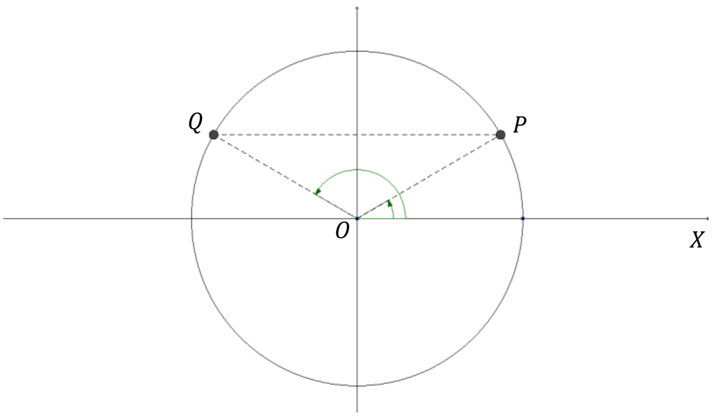
Equazioni del tipo $\sin f(x)=\sin g(x)$

Vediamo che relazione intercorre fra due angoli α,β affinché

$$\sin\alpha=\sin\beta$$

Consideriamo la seguente figura

Y



Due angoli individuano lo stesso seno se

- individuano lo stesso punto P sulla circonferenza
- individuano sulla circonferenza due punti simmetrici rispetto all'asse delle ordinate

Dunque affinché $\sin\alpha = \sin\beta$ se

- $\alpha = \beta + 2k\pi$
- $\alpha = \pi - \beta + 2k\pi$

Esempio.

Risolviamo

$$\sin(2x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

L'equazione è verificata se

$$2x = x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \vee 2x = \pi - \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$$

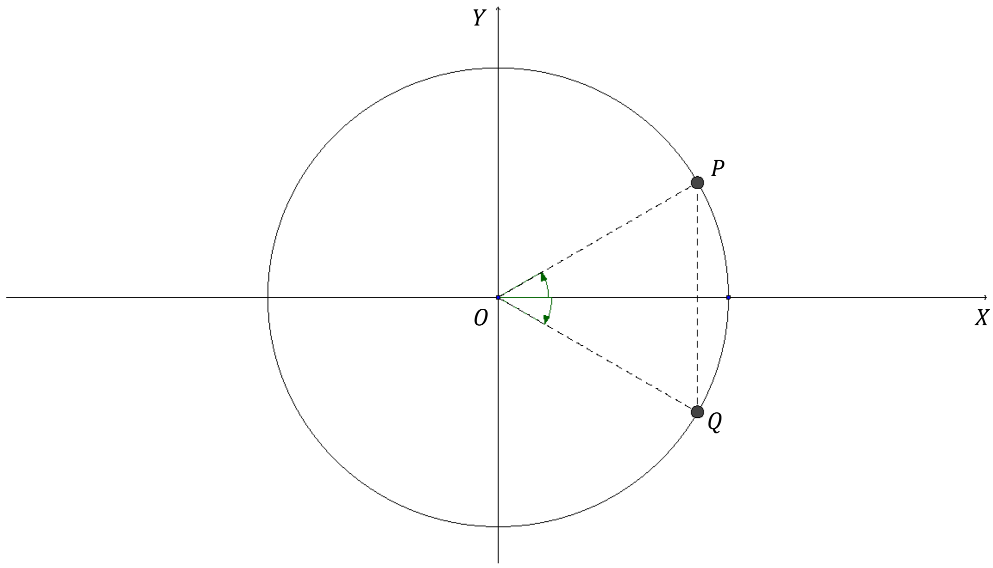
Risolvendo le equazioni di primo grado ottenute otteniamo la soluzione

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \vee x = \frac{5}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi$$

Equazioni del tipo $\cos f(x) = \cos g(x)$

Vediamo che relazione intercorre fra due angoli α, β affinché

$$\cos\alpha = \cos\beta$$



Due angoli restituiscono lo stesso coseno se

- individuano lo stesso punto P sulla circonferenza
- individuano sulla circonferenza due punti simmetrici rispetto all'asse delle ascisse

Dunque $\cos\alpha = \cos\beta$ vale se

- $\alpha = \beta + 2k\pi$
- $\alpha = -\beta + 2k\pi$

Esempio.

Risolviamo

$$\cos 3x = \cos 4x$$

L'uguaglianza è vera se

$$4x = 3x + 2k\pi \ \vee \ 4x = -3x + 2k\pi$$

che, risolta

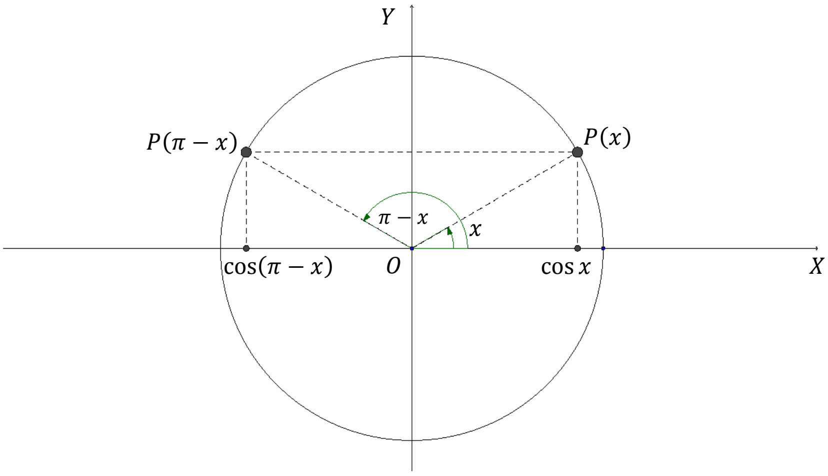
$$x = 2k\pi \ \vee \ x = \frac{2}{7}k\pi$$

Esempio.
Risolviamo

$$\cos 3x = -\cos x$$

L'equazione non è del tipo visto sopra, a causa della presenza del segno meno al secondo membro.

Osservando però che $-\cos x = \cos(\pi - x)$



l'equazione diventa

$$\cos 3x = \cos(\pi - x)$$

Risolvendo come abbiamo visto otteniamo

$$3x = \pi - x + 2k\pi \ \vee 3x = -\pi + x + 2k\pi$$

e, infine

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi \ \vee x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$$

Equazioni del tipo $\cos f(x) = \sin g(x)$

Per risolvere un'equazione del tipo

$$\cos \alpha = \sin \beta$$

possiamo ricondurci ai casi precedenti, ricordando che seno e coseno si scambiano passando agli angoli complementari.

Trasformando – ad esempio – il seno in coseno otteniamo

$$\cos \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

che si risolve come abbiamo già mostrato.

Esempio.
Risolviamo

$$\sin x = -\cos 3x$$

A causa della presenza del segno “ – ”, l’equazione non è di nessun tipo visto in precedenza.

Possiamo procedere così: l’equazione si può scrivere come

$$-\sin x = \cos 3x$$

e, poiché il seno è una funzione dispari

$$\sin(-x) = \cos 3x$$

A questo punto abbiamo un’equazione del tipo sen=cos che sappiamo trattare: trasformiamo il coseno in seno e otteniamo

$$\sin(-x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$

dunque

$$-x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi \ \vee \ -x = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + 2k\pi$$

che risolte forniscono la soluzione

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ \vee x = k\pi$$

Equazioni del tipo $\tan f(x) = \tan g(x)$

Per risolvere un’equazione del tipo

$$\tan\alpha = \tan\beta$$

osserviamo che due angoli hanno la stessa tangente se individuano lo stesso punto sulla circonferenza goniometrica o due punti antipodali, dunque se

$$\alpha = \beta + k\pi$$

Esempio.

Risolviamo

$$\tan x = \tan 2x$$

L’uguaglianza è verificata se

$$2x = x + k\pi$$

ovvero

$$x = k\pi$$

6.24 Equazioni goniometriche riconducibili a equazioni elementari

Le equazioni goniometriche riconducibili a equazioni elementari sono delle equazioni goniometriche che si risolvono applicando le usuali proprietà algebriche o utilizzando opportune formule goniometriche allo scopo di ricondursi alla risoluzione di equazioni elementari.

Vediamo qualche esempio significativo.

Esempio 1.

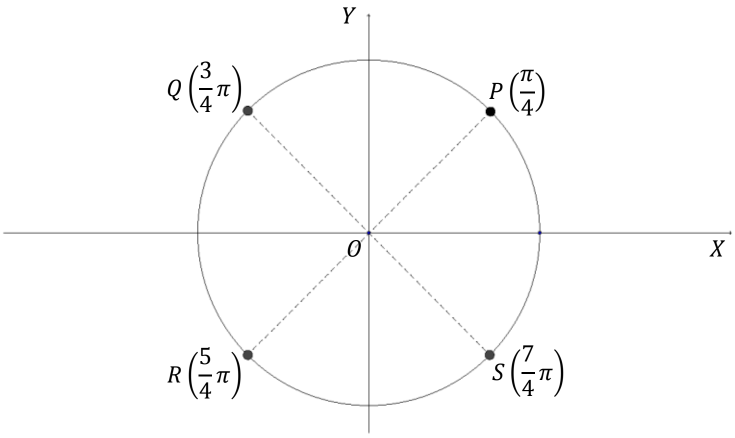
Risolviamo

$$4\sin^2 x = 1$$

L'equazione può essere interpretata come un'equazione algebrica di secondo grado in incognita $\sin x$ (posto, eventualmente, $\sin x = t$ l'equazione diventa $4t^2 = 1$ che, risolta dà $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$).

Otteniamo quindi

$$\sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$



Sono valori notevoli: la totalità degli angoli che individuano i punti P, Q, R, S (le soluzioni dell'equazione) sono

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

Esempio 2.

Risolviamo

$$\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$$

Il problema sorge perché l'incognita compare nell'argomento di due funzioni goniometriche diverse. In questo caso possiamo applicare la prima relazione fondamentale che sappiamo che consente di esprimere $\sin^2 x$ in funzione di $\cos^2 x$ (e viceversa) ottenendo

$$1 - \cos^2 x - \cos x + 1 = 0$$

da cui

$$\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$$

L'equazione così ottenuta è interpretabile come un'equazione algebrica di secondo grado: ponendo $t = \cos x$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

Risolta otteniamo

$$t = -2 \ \vee t = 1$$

ovvero

$$\cos x = -2 \ \vee \ \cos x = 1$$

che sono due equazioni elementari.

La prima equazione non ha soluzione (il coseno è limitato fra *-1* e *1*) mentre la seconda ha per soluzione

$$x = 2k\pi$$

che è la soluzione dell'equazione di partenza.

Esempio 3.

Risolviamo

$$\sin 2x = \sin x$$

In questo caso ci troviamo in difficoltà perché i due seni hanno argomenti diversi: applicando la formula di duplicazione al primo membro otteniamo

$$2 \sin x \cos x = \sin x$$

e, portando al primo membro il seno

$$2 \sin x \cos x - \sin x = 0$$

A questo punto raccogliamo

$$\sin x \, (2 \cos x - 1) = 0$$

e applichiamo la legge di annullamento del prodotto ottenendo

$$\sin x = 0 \ \vee \ 2 \cos x - 1 = 0$$

da cui

$$\sin x = 0 \ \vee \ \cos x = \frac{1}{2}$$

che sono due equazioni elementari.

Le soluzioni dell'equazione sono pertanto

$$x = k\pi \ \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Esempio 4.
Risolviamo

$$\sin x + \sin \frac{x}{2} = 0$$

Gli argomenti delle funzioni goniometriche sono diversi: *in linea di principio* siamo liberi di trasformare $\sin\frac{x}{2}$ in una espressione goniometrica con argomento x o $\sin x$ in un'espressione goniometrica con argomento $\frac{x}{2}$.

In questo caso la scelta è vincolata: dalla formula di bisezione abbiamo

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$$

da cui

$$\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

La sostituzione quindi non è attuabile, a causa dell'indeterminazione del segno. Peraltro, introdurre una radice nell'equazione non è proprio entusiasmante …

Alla luce di queste considerazioni, applicando la formula di duplicazione a $\sin x$: da

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

e sostituendo nell'equazione

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}=0$$

da cui, raccogliendo

$$\sin\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2}+1\right)=0$$

Applicando la legge di annullamento del prodotto otteniamo le equazioni elementari

$$\sin\frac{x}{2}=0\ \vee\ \cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$$

che hanno per soluzione

$$x=2k\pi\ \vee x=\pm\frac{4}{3}\pi+4k\pi$$

6.25 Equazioni goniometriche lineari (o di primo grado) o ad esse riconducibili

Chiamiamo *equazioni goniometriche lineari* le equazioni del tipo

$$a\sin x+b\cos x+c=0$$

dove a, b, c sono numeri reali e $a, b \neq 0$.

Se il termine noto c è nullo l'equazione diventa

$$a \sin x + b \cos x = 0$$

e prende il nome di *equazione lineare omogenea*.

Se $c \neq 0$ l'equazione $a \sin x + b \cos x + c = 0$ si dice *equazione lineare non omogenea*.

Vediamo alcune tecniche risolutive.

Equazioni lineari omogenee

Per risolvere l'equazione omogenea

$$a \sin x + b \cos x = 0$$

si può ricorrere al metodo dell'angolo aggiunto, trasformando la combinazione lineare $a \sin x + b \cos x$ in un'espressione del tipo $A \sin(x \pm \alpha)$ e risolvendo l'equazione elementare ottenuta.

Ad esempio, per risolvere

$$\sin x + \cos x = 0$$

troviamo $k = \sqrt{2}$, dopodiché otteniamo $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x\right) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ da cui

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

e quindi

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

che ha per soluzione

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Il metodo migliore per risolvere questo tipo di equazione consiste in generale *nel dividere ambo i membri per* $\cos x$.

Questa operazione è lecita solo per i valori di x che non annullano il coseno, ovvero per gli $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$: ma questi valori non sono mai soluzione dell'equazione. Sostituendoli infatti nell'espressione generale $a \sin x + b \cos x = 0$ si ottiene $\pm a = 0$ che è un'uguaglianza falsa poiché abbiamo richiesto che $a \neq 0$.

Dividendo ambo i membri per $cos\ x$ l'equazione $a \sin x + b \cos x = 0$ diventa

$$a \tan x + b = 0$$

che è un'equazione elementare.

Utilizzando questo metodo nell'esempio precedente otteniamo

$$\tan x + 1 = 0$$

da cui

$$\tan x = -1$$

che ci restituisce le soluzioni precedentemente trovate.

Equazioni lineari non omogenee

Le equazioni del tipo

$$a \sin x + b \cos x + c = 0 \quad a, b, c \neq 0$$

si possono ancora utilizzando il metodo dell'angolo aggiunto, trasformando la combinazione lineare $a \sin x + b \cos x$ in un'espressione del tipo $A \sin(x \pm \alpha)$ e risolvendo l'equazione elementare ottenuta.

Ad esempio, risolviamo

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x - 1 = 0$$

Applicando il metodo dell'angolo aggiunto a $\sqrt{3} \sin x + \cos x$, trovato $k = 2$ otteniamo

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x\right) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

dunque l'equazione si può scrivere come

$$2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$$

e, ricavando il seno

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

L'equazione elementare ottenuta è verificata se

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x + \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

che risolta fornisce la soluzione

$$x = 2k\pi \ \vee \ x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

Questo metodo si rivela efficace se l'angolo aggiunto trovato è un valore notevole, come in questo caso ($\alpha = \frac{\pi}{6}$).

Altrimenti conviene usare un altro metodo: ad esempio si possono utilizzare le *formule parametriche*

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

dove $t = \tan\frac{x}{2}$ e sostituire le espressioni razionali di seno e coseno nell'equazione, ottenendo un'equazione razionale fratta.

L'operazione di sostituzione è lecita per i valori di x che danno un senso a $\tan\frac{x}{2}$, ovvero per $x \neq \pi + 2k\pi$.

Dunque si avrà cura di verificare a parte se i numeri del tipo $\pi + 2k\pi$ sono soluzioni.

Risolviamo a titolo d'esempio l'equazione

$$2\sin x + \cos x + 1 = 0$$

Il metodo dell'angolo aggiunto non ci fornisce "buoni" valori dell'angolo; utilizziamo quindi le equazioni parametriche e otteniamo, per $x \neq \pi + 2k\pi$

$$\frac{4t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1 = 0$$

la cui soluzione è

$$t = -\frac{1}{2}$$

ovvero

$$\tan\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$$

da cui

$$\frac{x}{2} = \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + k\pi$$

e, infine

$$x = -2\mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \mathrm{k\pi}$$

Rimane da verificare se gli $x = \pi + 2k\pi$ sono soluzioni: sostituendo nell'equazione di partenza otteniamo

$$2\sin(\pi + 2k\pi\ ) + \cos(\pi + 2k\pi)\ + 1 = 0$$

L'uguaglianza è sempre vera: le soluzioni dell'equazione sono pertanto

$$x = -2\mathrm{arctg}\frac{1}{2} + k\pi \ \ \vee \ x = \pi + 2k\pi$$

6.26 Equazioni omogenee di secondo grado o ad esse riconducibili

Chiamiamo *equazione omogenea di secondo grado* un'espressione del tipo

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$$

dove a, b, c sono numeri reali non contemporaneamente nulli.

Se $a = 0$ o $c = 0$ l'equazione è risolubile come abbiamo visto utilizzando un raccoglimento e applicando la legge di annullamento del prodotto.

Nel caso in cui $a \neq 0$ e $c \neq 0$ possiamo dividere il primo e il secondo membro per $\cos^2 x$: (questo passaggio è lecito perché si può verificare che i valori di x che annullano il coseno non sono soluzioni dell'equazione).

Si ottiene quindi

$$a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$$

che è un'equazione riconducibile ad equazioni elementari.

A titolo d'esempio risolviamo

$$\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$$

Dividendo per $\cos^2 x$ otteniamo l'equazione equivalente

$$\tan^2 x - \tan x - 2 = 0$$

Posto $t = \tan x$ otteniamo $t^2 - t - 2 = 0$ le cui soluzioni sono $t = -1$ e $t = 2$ da cui

$$\tan x = -1 \ \vee \ \tan x = 2$$

da cui, infine, le soluzioni dell'equazione

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ \vee x = \operatorname{arctg} 2 + k\pi$$

Un'equazione del tipo

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x + d = 0, \ d \neq 0$$

è riconducibile a un'equazione omogenea di secondo grado.

Il termine noto d può essere espresso in funzione di $\sin^2 x$ e $\cos^2 x$ utilizzando la prima relazione fondamentale: $d = d \cdot 1 = d \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) = d \cdot \sin^2 x + d \cdot \cos^2 x$.

Ad esempio, data

$$3\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 4\cos^2 x + 3 = 0$$

può essere scritta come

$$3\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 4\cos^2 x + 3 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$$

da cui

$$3\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 4\cos^2 x + 3 \cdot \sin^2 x + 3 \cdot \cos^2 x = 0$$

a questo punto sommiamo i $\sin^2 x$ e i $\cos^2 x$ fra loro ottenendo l'equazione omogenea di secondo grado

$$6\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$$

che si risolve come abbiamo visto in precedenza.

6.27 Risoluzione grafica di equazioni trascendenti

Chiamiamo *trascendenti* le equazioni che hanno l'incognita che compare sia nell'argomento di una funzione goniometrica che all'esterno.

E' un'equazione trascendente, ad esempio, $\sin x - 2x = 0$.

In generale non esiste un metodo che consente di ottenere soluzioni esatte: quello che potremo fare è determinare il *numero* delle soluzioni e una loro approssimazione.

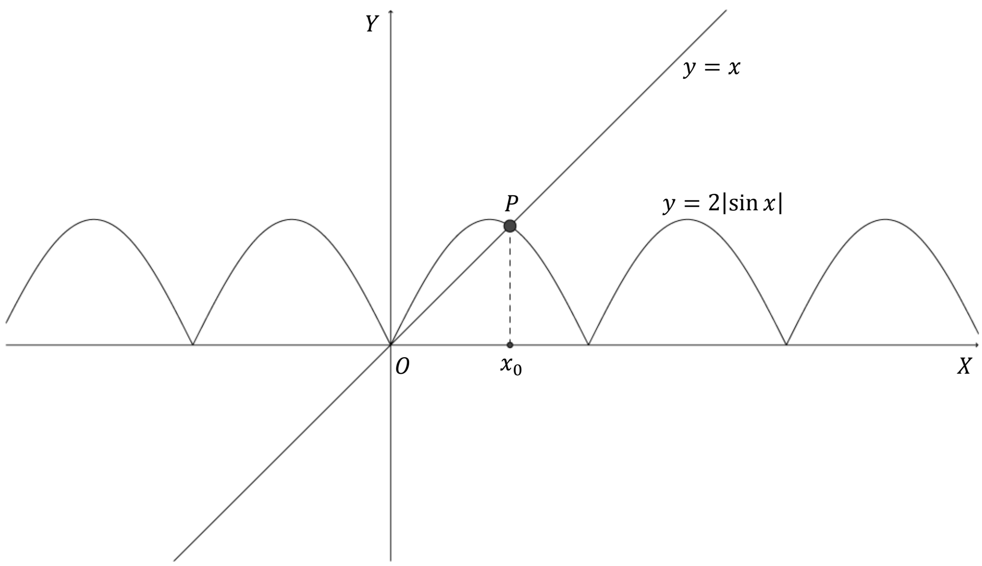
Vediamo come, procedendo con un esempio: è data l'equazione

$$2|\sin x| - x = 0$$

Isoliamo la funzione che contiene il seno e otteniamo

$$2|\sin x| = x$$

A questo punto rappresentiamo graficamente le funzioni $y = 2|\sin x|$ e $y = x$.



Le soluzioni dell'equazione, in generale, sono le ascisse dei punti di intersezione dei grafici.

In questo caso abbiamo un'unica soluzione x_0, compresa nell'intervallo $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right[$ ovvero $S = \{x_0\}, 1{,}5 < x_0 < 2{,}3$.

6.28 Disequazioni goniometriche elementari

Chiamiamo *disequazioni goniometriche elementari* le disequazioni del tipo

$$f(x)\ \mathcal{R}\ k$$

dove f è una funzione goniometrica, k un qualunque numero reale e $\mathcal{R}$ una relazione del tipo $<, \leq, >, \geq$.

Sono disequazioni elementari, ad esempio,

$$\sin x > \frac{1}{2}$$

$$\tan(2x) \leq 3$$

$$\cos x > 2$$

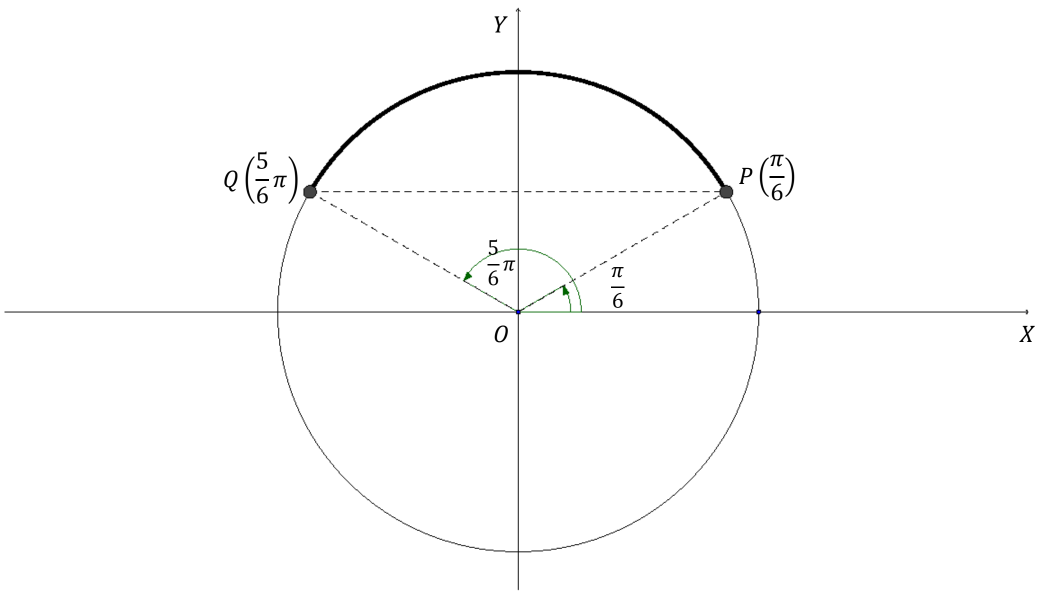
Per risolverle si utilizzano ragionamenti analoghi a quelli visti per le equazioni: vediamo qualche esempio.

Esempio.

Risolviamo

$$\sin x > \frac{1}{2}$$

Si tratta di determinare la totalità degli angoli che individuano punti sulla circonferenza goniometrica che hanno ordinata maggiore di $\frac{1}{2}$.



Osservando la figura notiamo che i punti cercati sono quelli dell'arco $\widehat{PQ}$: gli angoli che li determinano, dunque le soluzioni della disequazione sono quindi

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Esempio.
Risolviamo

$$\cos x > 2$$

Poiché il coseno è una funzione limitata e compresa tra *-1* e *1* la disuguaglianza è falsa per ogni valore di x e la disequazione non ha soluzione (o, in altri termini, la soluzione è l'insieme vuoto $S = \emptyset$).

Esempio 3.
Risolviamo

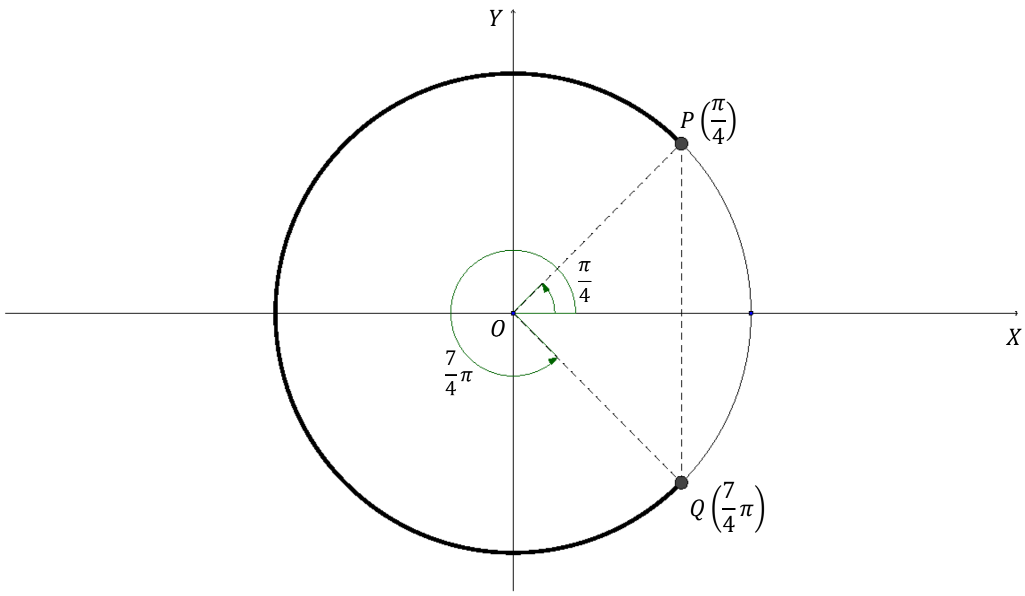
$$\cos x < 1$$

A causa della limitatezza del coseno, sarà sufficiente escludere i valori di x tali che $\cos x = 1$, dunque la soluzione è

$$x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Esempio.
Risolviamo

$$\cos(2x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$$



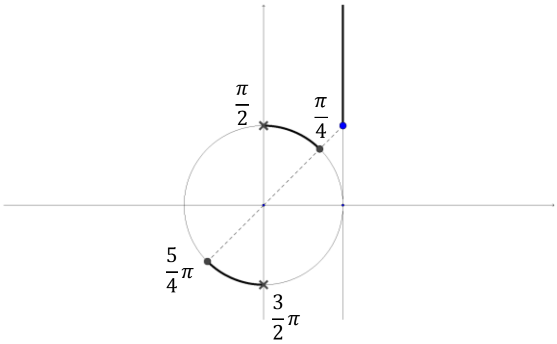
Dalla figura notiamo che le soluzioni sono ottenute da tutti gli angoli che individuano i punti dell'arco $\widehat{PQ}$, dunque la soluzione è $\frac{\pi}{4} + 2k\pi < 2x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$.

Per trovare la x moltiplichiamo per $\frac{1}{2}$ i tre termini delle disuguaglianze e otteniamo la soluzione

$$\frac{\pi}{8} + k\pi < x < \frac{7\pi}{8} + k\pi$$

Esempio 5.
Risolviamo

$$\tan 2x > 1$$



Osservando la figura notiamo che i punti della circonferenza che soddisfano la disequazione sono quelli dell'arco $\widehat{PB}$ e gli antipodali dell'arco $\widehat{QC}$; abbiamo dunque

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < 2x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

e, moltiplicando per $\frac{1}{2}$

$$\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

6.29 Disequazioni goniometriche riconducibili a elementari

Applicando proprietà algebriche o utilizzando se necessario formule goniometriche è possibile risolvere disequazioni goniometriche riconducendosi allo studio di disequazioni elementari.

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.

Risolviamo

$$\sin^2 x < \frac{1}{2}$$

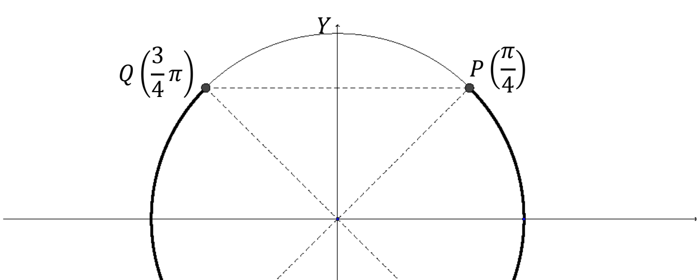
E' una disequazione di secondo grado con incognita $\sin x$, che risolta dà

$$|\sin x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ovvero

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < \sin x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

I punti che individuano la soluzioni sono evidenziati in figura.



L'arco $\widehat{SP}$ e il suo antipodale $\widehat{QR}$ sono individuati dagli angoli

acchini1975@gmail.com

$$-\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi$$

O X

$R\left(\frac{5}{4}\pi\right)$ $S\left(\frac{7}{4}\pi\right)$

Esempio 2.
Risolviamo

$$\sin 2x - senx > 0$$

Dobbiamo occuparci anzitutto di ottenere gli stessi argomenti nelle funzioni goniometriche che compaiono nell'equazione.

Applicando la formula di duplicazione del seno otteniamo

$$2\sin x\cos x-\sin x>0$$

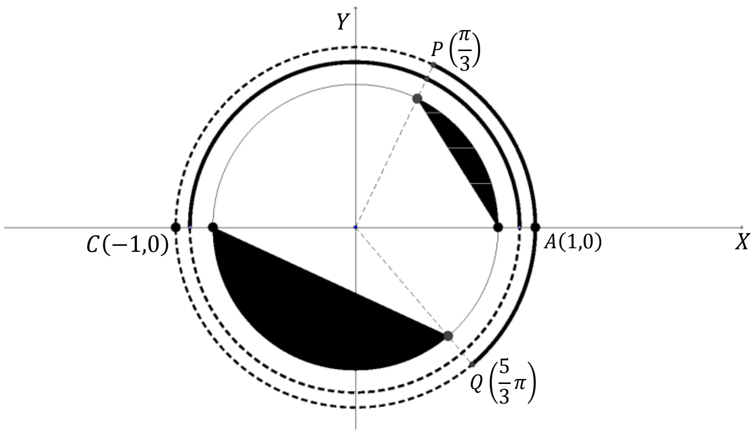
A questo punto, raccogliendo il seno

$$\sin x\,(2\cos x-1)>0$$

possiamo risolvere la disequazione studiando il segno di ogni fattore.

Il primo fattore $\sin x$ è positivo nella semicirconferenza superiore, mentre il secondo fattore è positivo se $2\cos x-1>0$, ovvero se $\cos x>\frac{1}{2}$.

Per confrontarli possiamo rappresentare l'andamento dei segni dei due fattori come indicato in figura, indicando all'esterno della circonferenza il segno del primo e del secondo fattore.



Gli archi evidenziati $\widehat{AP}$ e $\widehat{CQ}$ determinano le soluzioni della disequazione, dunque

$$S: 2k\pi<x<\frac{\pi}{3}+2k\pi\ \vee \pi+2k\pi<x<\frac{5}{3}\pi+2k\pi$$

Esempio.
Risolviamo

$$\sin x-\cos x\leq 0$$

Questa è una *disequazione lineare omogenea*.

Osserviamo esplicitamente che non è possibile, come nel caso delle equazioni, dividere per $\cos x$ per ottenere una disequazione in $\tan x$ poiché *$\cos x$ non è una quantità necessariamente positiva*.

E' possibile comunque utilizzare il metodo dell'angolo aggiunto: $k = \sqrt{2}$ perciò

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x \leq 0$$

da cui

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$$

dunque

$$\pi + 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{4} \leq 2\pi + 2k\pi$$

e infine

$$\frac{5}{4}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{9}{4}\pi + 2k\pi$$

Esempio.

Risolviamo

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 < 0$$

Possiamo porre $\sin x = t$ e otteniamo

$$2t^2 + t - 1 < 0$$

che, risolta, dà $-1 < t < \frac{1}{2}$ ovvero

$$-1 < \sin x < \frac{1}{2}$$

La prima disuguaglianza è verificata per ogni angolo che non individui il punto $D(0, -1)$, ovvero se $x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$; la seconda se $0 + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee\ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$, perciò la soluzione è

$$0 + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee\ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \ \vee\ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$

o, più brevemente,

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee\ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi \ \wedge x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

6.30 Disequazioni goniometriche omogenee di secondo grado

Si chiama *disequazione omogenea di secondo grado* una disequazione del tipo

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x <> 0$$

con a, b, c numeri reali non tutti nulli.

Abbiamo a disposizione due metodi risolutivi.

1° metodo
L'idea è di dividere per $\cos^2 x$ per ottenere una disequazione in $\tan x$: questa operazione è lecita se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e per questi valori $\cos^2 x > 0$. Una volta trovate le – eventuali – soluzioni, si verifica se i valori esclusi sono anch'essi soluzione.

Esempio.
Risolviamo

$$\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x \geq 0$$

Se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ possiamo dividere primo e secondo membro per $\cos^2 x$ ottenendo

$$\tan^2 x - 3\tan x + 2 \geq 0$$

Risolvendo otteniamo $\tan x \leq 1 \vee \tan x \geq 2$ da cui

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi \vee \operatorname{arctg} 2 + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Resta da verificare se i numeri del tipo $\frac{\pi}{2} + k\pi$ sono soluzione: sostituendo nella disequazione otteniamo

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \geq 0$$

da cui

$$1 \geq 0$$

Essendo una disuguaglianza vera, i numeri $\frac{\pi}{2} + k\pi$ sono soluzione della disequazione. La soluzione finale è pertanto

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{4} + k\pi \vee \operatorname{arctg} 2 + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

2° metodo
Un altro metodo consiste nel *linearizzare* i termini contenuti nelle disequazioni, utilizzando le formule goniometriche $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$, $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

La disequazione in questo caso diventa

$$\frac{1-\cos(2x)}{2} - \frac{3}{2}\sin(2x) + 1 + \cos(2x) \geq 0$$

ovvero

$$3\sin(2x) + \cos(2x) + 3 \geq 0$$

La disequazione lineare così ottenuta si può risolvere con uno dei metodi visti.

6.31 Disequazioni goniometriche frazionarie

Chiamiamo *disequazioni goniometriche frazionarie* le disequazioni del tipo

$$\frac{N(x)}{D(x)} <> 0$$

dove $N(x)$ e $D(x)$ sono espressioni che contengono funzioni goniometriche il cui argomento dipende da x.

In generale per trovare la soluzione si procede come per le disequazioni algebriche fratte, studiando il segno del numeratore e del denominatore e confrontandoli poi tra loro.

In questo caso abbiamo un problema in più, dovuto alla *periodicità*: se il periodo T_1 del numeratore e il periodo T_2 del denominatore sono minori o uguali a 2π possiamo rappresentare i segni sulla circonferenza goniometrica e procedere come al solito.

Se uno dei due periodi è maggiore di 2π, non è detto che il comportamento di $\frac{N(x)}{D(x)}$ possa essere descritto completamente nell'intervallo $[0,2\pi]$ e bisogna confrontare i segni in un intervallo lungo quanto il minimo comune multiplo fra T_1 e T_2.

Discorsi del tutto analoghi valgono per disequazioni in forma di prodotto, del tipo $f(x)g(x) <> 0$.

Vediamo qualche esempio.

Esempio.
Risolviamo

$$\frac{\sin(x)}{2+\cos x} \leq 0$$

A causa della limitatezza del coseno il denominatore è una quantità variabile ma *sempre positiva*: è lecito quindi moltiplicare ambo i membri per $2+\cos x$ ottenendo

$$\sin(x) \leq 0$$

che ha per soluzione

$$\pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi$$

Esempio.

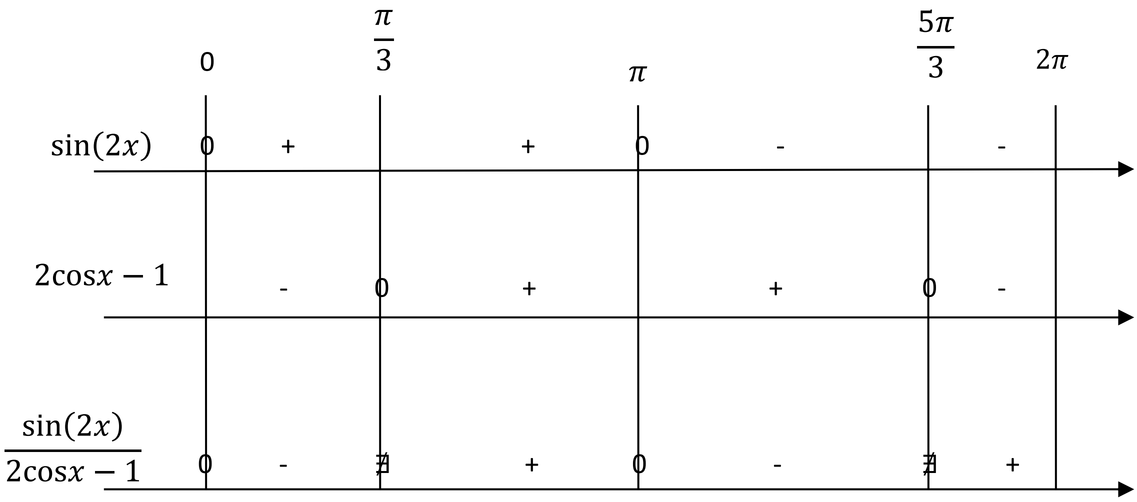
Risolviamo

$$\frac{\sin(2x)}{2\cos x - 1} < 0$$

Il periodo del numeratore è π, quello del denominatore è 2π: poiché entrambi non sono maggiori di 2π, si possono confrontare i segni sulla circonferenza goniometrica come al solito; in alternativa possiamo dare una rappresentazione dei segni su rette orientate.

$\sin(2x) > 0 \Rightarrow 0 < x < \pi$

$2\cos x - 1 > 0 \Rightarrow \cos x > \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{5}{3}\pi$



Dunque la soluzione, tenendo conto della molteplicità, è

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ \pi + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

Esempio.
Risolviamo

$$\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2}\cos x - 1} > 0$$

Il periodo del numeratore è 4π, quello del denominatore è 2π: il minimo comune fra i due è 4π, dunque dovremo studiare il segno della frazione in un intervallo lungo 4π, ad esempio $[0,4\pi]$. Non è possibile rappresentare i segni del numeratore e del denominatore sulla circonferenza goniometrica e siamo costretti a rappresentarli su una retta come nell'esempio precedente.

Studiamo quindi il segno della disequazione limitandoci ai valori di x nell'intervallo $[0,4\pi[$.

$\sin\left(\frac{x}{2}\right) > 0 \Longrightarrow 0 + 2k\pi < \frac{x}{2} < \pi + 2k\pi \ \Longrightarrow \ 4k\pi < x < 2\pi + 4k\pi$;

se $k = 0 \Longrightarrow 0 < x < 2\pi$

se $k = 1 \Longrightarrow 2\pi < x < 4\pi$ e si esce dall'intervallo $[0,4\pi[$

$\sqrt{2}\cos x - 1 > 0 \Longrightarrow \cos x > \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow -\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi$;

se $k = 0 \Longrightarrow -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$; dunque, affinché stia in $[0,4\pi[$ $0 \le x < \frac{\pi}{4}$.

se $k = 1 \Longrightarrow \frac{7}{4}\pi < x < \frac{9}{4}\pi$.

se $k = 2 \Longrightarrow \frac{15}{4}\pi < x < \frac{17}{4}\pi$; le x nell'intervallo sono dunque $\frac{15}{4}\pi < x < 4\pi$.

	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{7}{4}\pi$		2π		$\frac{9}{4}\pi$		$\frac{15}{4}\pi$		4π
$\sin\left(\frac{x}{2}\right)$	0	+		+		+	0	-		-		-	
$\sqrt{2}\cos x - 1$		+	0	-	0	+		+	0	-	0	+	
$\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2}\cos x - 1}$	0	+	∄	-	∄	+	0	-	∄	+	∄	-	

La soluzione è, tenuto conto della molteplicità di 4π

$$4k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 4k\pi \ \vee \ \frac{7}{4}\pi + 4k\pi < x < 2\pi + 4k\pi \ \vee \ \frac{9}{4}\pi + 4k\pi < x < \frac{15}{4}\pi + 4k\pi$$

6.32 Esercizi proposti

1	Risolvi le seguenti equazioni. a) $\cos x = -\frac{1}{2}$ b) $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = -1$ c) $\tan(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e) $\cos x - \pi = 0$ f) $2\cos(2x) + 4 = 0$ g) $\sin 3x + 1 = 0$ h) $\tan 3x = -1$ i) $\sin(4x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ l) $\cos 2x = -1$ m) $\sin x = -\frac{1}{3}$ n) $\cos 2x = \frac{4}{5}$
2	Risolvi le seguenti equazioni. a) $\sin x = \sin(5x)$ b) $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \cos 3x$ c) $\tan 2x = \tan x$ d) $\sin 2x = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ e) $\cos 4x = -\cos x$ f) $\cos 2x = -\sin x$
3	Risolvi le seguenti equazioni. a) $\sin^2 x - \sin x = 0$ b) $\cos^2 x - 2\cos x = 0$ c) $\tan^2 x - 1 = 0$ d) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ e) $\tan^2 x + \sqrt{3}\tan x = 0$ f) $2\cos^2 x - 10\cos x + 1 = 0$ g) $\sin^2 x = 2$ h) $\sin^5 x = 1$
4	Risolvi le seguenti equazioni. a) $\sin^2 x = \cos^2 x + \cos x$ b) $2\cos^2 x - \sin x = 1$ c) $\sin x\,(2\cos x - 1) = 0$
5	Risolvi le seguenti equazioni. a) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = 1$ b) $\tan(45° + x) - \tan(45° - x) = 2\sqrt{3}$ c) $\cos 2x + \sin^2 x = 0$ d) $\cos 2x - 3 = -5\sin x$ e) $2\cos^2\frac{x}{2} + \cos x = 1$ f) $\tan^2\frac{x}{2} + \cos x = 1$
6	Risolvi le seguenti equazioni. a) $2\cos\frac{x}{2} - 2\cos x = \sqrt{3} - 1$ b) $\sqrt{2}\sin\frac{x}{2} + 2\cos x = 1$
7	Risolvi le seguenti equazioni. a) $3\sin x = \sqrt{3}\cos x$ b) $\sin x - \left(2+\sqrt{3}\right)\cos x = 0$ c) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2$ d) $\sin x + \cos x = 1$ e) $\cos x - \sqrt{3}\sin x + 1 = 0$ f) $\sin x + \cos x = 2$ g) $2\cos x - 3\sin x = 2$
8	Risolvi le seguenti equazioni. a) $3\sin^2 x - \cos^2 x = 0$ b) $\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$ c) $2\sin^2 x + 1 = 4\sin x\cos x$
9	Risolvi le seguenti equazioni. a) $2\sin^2 x - 4\cos^2 x + 1 = 0$ b) $2\cos x = 1 + \sin x$ c) $\tan 2x = 2\sqrt{3}\cos 2x$ d) $2\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sin^2 x$ e) $\cos 2x + \cos x - \sin x = 0$ f) $4\sin x\cos x = \sqrt{3}$ g) $2\sin^2\frac{x}{2} = \sin 2x - \cos x$ h) $\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x = 1$ i) $\sin^2 2x + 3\cos^2 x$=3 l) $\cos x + \sin 3x = 0$ m) $\cos^2 x + \sin^2 2x = 1$

10	Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche elementari. a) $\sin x \geq 1$ b) $2\cos x + 1 > 0$ c) $\frac{1}{2} < \cos 2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\lvert\sin 3x\rvert < \frac{1}{2}$ e) $\lvert\cos x\rvert \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $0 < \sin x < 1$ g) $4\sin^2 x - 1 > 0$ h) $\lvert\tan x\rvert > 1$ i) $3\sin x > 1$ l) $\tan^2 x - \sqrt{3} > 0$
11	Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche. a) $2\sin^2 x - \sin x > 0$ b) $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 > 0$ c) $2\cos^2 x \leq \sin x + 1$ d) $\sin x\,(1 + \tan x) > 0$ e) $(\cos x - 1)(\sin x + 1) \leq 0$ f) $3\sin x < \sqrt{3}\cos x$ g) $\cos x - \cos\frac{x}{2} > 0$ h) $\sqrt{3}\cos x + \sin x > 2$ i) $\sin x + \cos x < 1$ l) $3\sin^2 x - \cos^2 x > 0$ m) $\sin 2x + \cos x > 0$ n) $2\sin^2 x + 1 < 4\sin x\cos x$ o) $2\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x \leq 1$ p) $\cos 2x < \sin x$
12	Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche (il periodo può essere maggiore di 2π). a) $\frac{\sin x}{\cos x + 1} < 0$ b) $\frac{3\cos x - 5}{2\sin x + 1} > 0$ c) $\frac{\tan^2 x - 1}{2\cos x + 1} \geq 0$ d) $\frac{2\sin x + \sqrt{3}}{\lvert\cos x\rvert} \leq 0$ e) $\frac{1 + \lvert\cos x\rvert}{2\cos x - 1} > 0$ f) $\sqrt{2\sin x} < \sin x + 1$ g) $\sin\frac{x}{2}(2\cos x - 1) > 0$ h) $\cos\frac{x}{3}\sin 2x \leq 0$ i) $\left\lvert\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right\rvert \leq 1$ l) $\sqrt{1 - \lvert\sin x\rvert} = \cos x\,, x \in [0,2\pi]$
13	Trova un'equazione che abbia per soluzione $S = \mathbb{Z}$.
14	Risolvi per via grafica le seguenti equazioni e disequazioni trascendenti. a) $\sin x + x = 2$ b) $\lvert\cos x\rvert + x = 0$ c) $\sin\frac{x}{2} = x^2$ d) $\sqrt{x} = \cos x$ e) $2\sin x = 1 - x^2$ f) $\sin x < x$ g) $\sin x\cos x < x$